

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ В.И. ЛЕНИНА»  
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ОСНОВ ТЕПЛОТЕХНИКИ

## **НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ**

Справочные материалы для решения задач

Иваново 2013

Составители: В.В. Бухмиров  
Д.В. Ракутина  
Ю.С. Солнышкова

Редактор Т.Е. Созинова

В методических указаниях представлены аналитические решения линейного дифференциального уравнения теплопроводности без внутренних источников теплоты для тел простейшей формы (неограниченная пластина, неограниченный цилиндр и шар) при граничных условиях первого, второго и третьего родов, включая установившийся (квазистационарный, регулярный) режим теплопроводности. Начальное распределение температуры в телах принято постоянным по сечению тела. Условия теплообмена с внешней средой не изменяются по поверхности и не зависят от времени.

Справочные материалы предназначены для решения задач при проведении практических занятий, контрольных и экзаменационных работ, а также для самостоятельной работы студентов.

Первый, второй и третий разделы методических указаний посвящены аналитическим решениям при граничных условиях 1, 2 и 3 рода соответственно. Внутри каждого раздела задачи классифицированы по типу формы тела (пластина, цилиндр и шар).

Методические указания утверждены цикловой методической комиссией ТЭФ.

Рецензент

кафедра теоретических основ теплотехники ФГБОУ ВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»

## **НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ**

Справочные материалы для решения задач

Составители: БУХМИРОВ Вячеслав Викторович  
РАКУТИНА Дарья Валерьевна  
СОЛНЫШКОВА Юлия Сергеевна

Редактор Т.В. Соловьева

Подписано в печать                      Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>  
Печать плоская. Усл.печ.л. 2,09      Тираж 100 экз. Заказ №  
Ивановский государственный энергетический университет,  
153003, г. Иваново, ул. Рабфаковская, 34.  
Отпечатано в УИУНЛ ФГБОУ ВПО ИГЭУ

## СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ ВЕЛИЧИН	4
ВВЕДЕНИЕ	5
1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ 1 РОДА	6
1.1. Температурное поле неограниченной пластины при граничных условиях 1 рода	6
1.2. Температурное поле неограниченного цилиндра при граничных условиях 1 рода	7
1.3. Температурное поле шара при граничных условиях 1 рода	8
2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ 2 РОДА	11
2.1. Температурное поле неограниченной пластины при граничных условиях 2 рода	11
2.2. Температурное поле неограниченного цилиндра при граничных условиях 2 рода	12
2.3. Температурное поле шара при граничных условиях 2 рода	14
3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ 3 РОДА	15
3.1. Температурное поле неограниченной пластины при граничных условиях 3 рода	16
3.2. Температурное поле неограниченного цилиндра при граничных условиях 3 рода	23
3.3. Температурное поле шара при граничных условиях 3 рода	30
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	36

## ОБОЗНАЧЕНИЯ ВЕЛИЧИН

### Геометрические характеристики тел

$k$  – коэффициент формы тела ( $k = 1$  для бесконечной пластины,  $k = 2$  для бесконечного цилиндра и  $k = 3$  для шара);

$\delta$  – толщина пластины, м;

$r_n$  – радиус цилиндра или шара, м;

$R$  – характерный размер тела (пластины, цилиндра или шара), м;

$R = \delta/2$  – при двустороннем симметричном нагреве (охлаждении) пластины, м;

$R = \delta$  – при одностороннем нагреве (охлаждении) пластины, м;

$R = r_n$  – характерный размер цилиндра или шара, м;

$x$  – декартова координата произвольной точки пластины, м;

$r$  – радиальная координата произвольной точки цилиндра или шара, м;

$X = x/R$  – безразмерная декартова координата произвольной точки пластины;

$X = r/R$  – безразмерная радиальная координата произвольной точки цилиндра или шара.

### Физические характеристики тел

$\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;

$c_p$  – удельная массовая изобарная теплоемкость, Дж/(кг·К);

$c'_p = \rho \cdot c_p$  – удельная объемная изобарная теплоемкость материала тела, Дж/(м<sup>3</sup>·К);

$\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);

$a = \lambda / c'_p$  – коэффициент температуропроводности материала тела, м<sup>2</sup>/с.

### Временные характеристики процесса

$\tau$  – время, с;

$Fo = a \cdot \tau / R^2$  – критерий Фурье или безразмерное время для тел простейшей формы.

### Характеристики внешнего теплообмена на поверхности тела

$T_w$  – температура стенки (поверхности тела), °С;

$q_w$  – плотность теплового потока на поверхности тела, Вт/м<sup>2</sup>;

$T_f$  – температура текучей среды (жидкости, газа), омывающей тело, °С;

$Bi = \alpha \cdot R / \lambda$  – критерий Био или безразмерный коэффициент теплоотдачи для тел простейшей формы.

## Характеристики температурного поля тела

$T_0$  – начальная температура тела,  $^{\circ}\text{C}$ ;

$T=T(x,\tau)$  – температура тела,  $^{\circ}\text{C}$ ;

$\Theta' = (T_w - T)/(T_w - T_0)$  – относительная безразмерная температура тела при граничных условиях 1 рода;

$\Theta'' = \lambda(T - T_0)/(q_w \cdot R)$  – относительная безразмерная температура тела при граничных условиях 2 рода;

$\Theta''' = (T_f - T)/(T_f - T_0)$  – относительная безразмерная температура тела при граничных условиях 3 рода.

## Компоненты аналитических решений

$\delta_n$  –  $n$ -й корень характеристического уравнения при граничных условиях 1 рода ( $n = 1, 2, \dots, \infty$ );

$\nu_n$  –  $n$ -й корень характеристического уравнения при граничных условиях 2 рода ( $n = 1, 2, \dots, \infty$ );

$\mu_n$  –  $n$ -й корень характеристического уравнения при граничных условиях 3 рода ( $n = 1, 2, \dots, \infty$ );

$J_0(u)$  – функция Бесселя 1 рода нулевого порядка от аргумента  $u$  (табл. 1.1);

$J_1(u)$  – функция Бесселя 1 рода первого порядка от аргумента  $u$  (табл. 1.1).

Функции Бесселя дробных порядков выражаются через тригонометрические функции:

$$J_{-\frac{1}{2}}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot u}} \cos(u), \quad J_{\frac{1}{2}}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot u}} \sin(u);$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot u}} \left( -\frac{\cos(u)}{u} - \sin(u) \right), \quad J_{\frac{3}{2}}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot u}} \left( \frac{\sin(u)}{u} - \cos(u) \right).$$

$N_n$ ,  $N_c$  и  $N_{ш}$  – коэффициенты в аналитическом решении при регулярном режиме теплопроводности для тепловых центров неограниченной пластины, неограниченного цилиндра и шара соответственно;

$P_n$ ,  $P_c$  и  $P_{ш}$  – коэффициенты в аналитическом решении при регулярном режиме теплопроводности для поверхностей неограниченной пластины, неограниченного цилиндра и шара соответственно.

## ВВЕДЕНИЕ

Изучение раздела «Нестационарная теплопроводность» дисциплины «Тепломассообмен» предъявляет повышенные требования к уровню теоретической подготовки студентов.

Важным элементом обучения является практическое использование известных аналитических результатов для решения инженерных задач теп-

лопроводности. Наиболее систематическим источником информации о таких результатах является монография А.В. Лыкова [1]. В известных учебниках материал по данной теме либо не рассматривается [2], либо изложен весьма сжато [3, 4, 5, 6], либо представлен краткими выдержками [7] из работы [1].

Настоящее учебное пособие предназначено для решения задач по разделу «Нестационарная теплопроводность» курса «теплообмен».

## 1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ 1 РОДА

Обобщенная расчетная формула

$$T(X, Fo) = T'(X, Fo) + T''(X, Fo), \quad (1.1)$$

$$T'(X, Fo) = T(1, Fo) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_1}{\delta_n} \exp(-\delta_n^2 \cdot Fo) \int_0^{Fo} \exp(\delta_n^2 \cdot \varepsilon) \frac{dT(1, \varepsilon)}{d\varepsilon} d\varepsilon; \quad (1.2)$$

$$T''(X, Fo) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_1 \exp(-\delta_n^2 \cdot Fo) \int_0^1 \Lambda_1 [T(X, 0) - T(1, 0)] dX. \quad (1.3)$$

Лямбда-функция

$$\Lambda_1 = \frac{X^{\frac{2-k}{2}} J_{\frac{k-2}{2}}(\delta_n X)}{J_{\frac{k}{2}}(\delta_n)}. \quad (1.4)$$

Характеристическое уравнение

$$J_{\frac{k-2}{2}}(\delta_n) = 0. \quad (1.5)$$

### 1.1. Температурное поле неограниченной пластины при граничных условиях 1 рода

#### 1.1.1. Характеристическое уравнение и его корни

$$\cos(\delta_n) = 0, \quad (1.6)$$

$$\delta_n = (2 \cdot n - 1) \frac{\pi}{2} \text{ для } n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (1.7)$$

#### 1.1.2. Лямбда-функция

$$\Lambda_1 = (-1)^{n+1} \cos(\delta_n X). \quad (1.8)$$

### 1.1.3. Точное аналитическое решение при $T(1, Fo) = T_w = const$

а) В размерном виде

$$T(X, Fo) = T_w + 2[T(X, 0) - T_w] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\delta_n} \cos(\delta_n X) \exp[-(\delta_n)^2 \cdot Fo]; \quad (1.9)$$

б) В безразмерной форме

$$\Theta'(X, Fo) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\delta_n} \cos(\delta_n X) \exp[-(\delta_n)^2 \cdot Fo]. \quad (1.10)$$

### 1.1.4. Приближенное решение при $Fo \geq 0,2$ (используется только первый член бесконечного ряда ( $n=1$ ))

$$\Theta'(X, Fo) = \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} X\right) \exp\left[-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 Fo\right]. \quad (1.11)$$

Безразмерная температура в характерных точках пластины при  $Fo \geq 0,2$

$$\Theta'(0, Fo) = \frac{4}{\pi} \exp\left[-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 Fo\right]; \quad (1.12)$$

$$\Theta'(1, Fo) = 0. \quad (1.13)$$

Решение (1.12) представлено также графически линией  $Vi = \infty$  (см. п. 3.1) на номограмме  $\Theta'''_{x=0} = f(Fo, Vi)$  (рис. 3.1).

## 1.2. Температурное поле неограниченного цилиндра при граничных условиях 1 рода

### 1.2.1. Характеристическое уравнение и его корни

$$J_0(\delta_n) = 0. \quad (1.14)$$

Значения первых десяти ( $n = 1 \dots 10$ ) корней уравнения (1.14) равны:

$$\delta_1 = 2,40482; \delta_2 = 5,52007; \delta_3 = 8,65372; \delta_4 = 11,79133; \delta_5 = 14,93091; \\ \delta_6 = 18,07106; \delta_7 = 21,21160; \delta_8 = 24,35247; \delta_9 = 27,49347; \delta_{10} = 30,63460.$$

### 1.2.2. Лямбда-функция

$$\Lambda_1 = \frac{J_0(\delta_n X)}{J_1(\delta_n)}. \quad (1.15)$$

Значения функций Бесселя  $J_0(u)$  и  $J_1(u)$  приведены в табл. 1.1.

### 1.2.3. Точное аналитическое решение при $T(1, Fo) = T_w = const$

а) В размерном виде

$$T(X, Fo) = T_w + 2[T(X, 0) - T_w] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\delta_n X)}{\delta_n \cdot J_1(\delta_n)} \exp[-(\delta_n)^2 \cdot Fo]; \quad (1.16)$$

б) В безразмерной форме

$$\Theta'(X, Fo) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\delta_n X)}{\delta_n \cdot J_1(\delta_n)} \exp[-(\delta_n)^2 \cdot Fo]. \quad (1.17)$$

### 1.2.4. Приближенное решение при $Fo \geq 0,2$ (используется только первый член бесконечного ряда ( $n=1$ ))

$$\Theta'(X, Fo) = 1,602 \cdot J_0(2,4048 \cdot X) \cdot \exp[-5,873 \cdot Fo]. \quad (1.18)$$

Безразмерная температура в характерных точках цилиндра при  $Fo \geq 0,2$

$$\Theta'(0, Fo) = 1,602 \cdot \exp[-5,873 \cdot Fo]; \quad (1.19)$$

$$\Theta'(1, Fo) = 0. \quad (1.20)$$

Решение (1.19) представлено также графически линией  $Vi=\infty$  (см. п 3.2) на номограмме  $\Theta'''_{X=0} = f(Fo, Vi)$  (рис. 3.4).

## 1.3. Температурное поле шара при граничных условиях 1 рода

### 1.3.1. Характеристическое уравнение и его корни

$$\sin(\delta_n) = 0; \quad (1.21)$$

$$\delta_n = n \cdot \pi \quad \text{для } n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (1.22)$$

### 1.3.2. Лямбда-функция

$$\Lambda_1 = (-1)^{n+1} \frac{\sin(\delta_n X)}{X}. \quad (1.23)$$

### 1.3.3. Точное аналитическое решение при $T(1, Fo) = T_w = const$ для $X > 0$

а) В размерном виде

$$T(X, Fo) = T_w + 2[T(X, 0) - T_w] \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(\delta_n X)}{\delta_n \cdot X} \exp[-(\delta_n)^2 \cdot Fo]; \quad (1.24)$$

б) В безразмерной форме

$$\Theta'(X, Fo) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(\delta_n X)}{\delta_n \cdot X} \exp[-(\delta_n)^2 \cdot Fo]. \quad (1.25)$$

Для  $X = 0$  (для центра шара) точное аналитическое решение записывают:



а) В размерном виде

$$T(0, Fo) = T_w + 2[T(0,0) - T_w] \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \exp[-(\delta_n)^2 Fo]; \quad (1.26)$$

б) В безразмерной форме

$$\Theta'(0, Fo) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \exp[-(\delta_n)^2 \cdot Fo]. \quad (1.27)$$

**1.3.4. Приближенное решение при  $Fo \geq 0,2$  (используется только первый член бесконечного ряда ( $n=1$ ))**

$$\Theta'(X, Fo) = 2 \frac{\sin(\pi X)}{\pi \cdot X} \exp[-\pi^2 \cdot Fo]. \quad (1.28)$$

Безразмерная температура в характерных точках цилиндра при  $Fo \geq 0,2$

$$\Theta'(0, Fo) = 2 \cdot \exp[-\pi^2 \cdot Fo]; \quad (1.29)$$

$$\Theta'(1, Fo) = 0. \quad (1.30)$$

Решение (1.29) представлено также графически линией  $Vi=\infty$  (см. п 3.3) на номограмме  $\Theta'_{X=0} = f(Fo, Vi)$  (рис. 3.7).

Таблица 1.1

Функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков

u	$J_0(u)$	$J_1(u)$	u	$J_0(u)$	$J_1(u)$	u	$J_0(u)$	$J_1(u)$
0,0	1,0000	0,0000	5,0	-0,1776	-0,3276	10,0	-0,2459	0,0435
0,1	0,9975	0,0499	5,1	-0,1443	-0,3371	10,1	-0,2490	0,0184
0,2	0,9900	0,0995	5,2	-0,1103	-0,3432	10,2	-0,2496	-0,0066
0,3	0,9776	0,1483	5,3	-0,0758	-0,3460	10,3	-0,2477	-0,0313
0,4	0,9604	0,1960	5,4	-0,0412	-0,3453	10,4	-0,2434	-0,0555
0,5	0,9385	0,2423	5,5	-0,0068	-0,3414	10,5	-0,2366	-0,0788
0,6	0,9120	0,2867	5,6	0,0270	-0,3343	10,6	-0,2276	-0,1012
0,7	0,8812	0,3290	5,7	0,0599	-0,3241	10,7	-0,2164	-0,1224
0,8	0,8463	0,3688	5,8	0,0917	-0,3110	10,8	-0,2032	-0,1422
0,9	0,8075	0,4059	5,9	0,1220	-0,2951	10,9	-0,1881	-0,1604
1,0	0,7652	0,4400	6,0	0,1506	-0,2767	11,0	-0,1712	-0,1768
1,1	0,7196	0,4709	6,1	0,1773	-0,2559	11,1	-0,1528	-0,1913
1,2	0,6711	0,4983	6,2	0,2017	-0,2329	11,2	-0,1330	-0,2038
1,3	0,6201	0,5220	6,3	0,2238	-0,2081	11,3	-0,1121	-0,2143
1,4	0,5669	0,5419	6,4	0,2433	-0,1816	11,4	-0,0902	-0,2224
1,5	0,5118	0,5579	6,5	0,2601	-0,1538	11,5	-0,0677	-0,2284

Окончание табл. 1.1

u	$J_0(u)$	$J_1(u)$	u	$J_0(u)$	$J_1(u)$	u	$J_0(u)$	$J_1(u)$
1,6	0,4554	0,5699	6,6	0,2740	-0,1250	11,6	-0,0446	-0,2320
1,7	0,3980	0,5778	6,7	0,2851	-0,0953	11,7	-0,0213	-0,2333
1,8	0,3400	0,5815	6,8	0,2931	-0,0652	11,8	0,0020	-0,2323
1,9	0,2818	0,5812	6,9	0,2981	-0,0349	11,9	0,0250	-0,2290
2,0	0,2239	0,5767	7,0	0,3001	-0,0047	12,0	0,0477	-0,2234
2,1	0,1666	0,5683	7,1	0,2991	0,0252	12,1	0,0697	-0,2158
2,2	0,1104	0,5560	7,2	0,2951	0,0543	12,2	0,0908	-0,2060
2,3	0,0555	0,5399	7,3	0,2882	0,0826	12,3	0,1108	-0,1943
2,4	0,0025	0,5202	7,4	0,2786	0,1096	12,4	0,1296	-0,1807
2,5	-0,0484	0,4971	7,5	0,2663	0,1352	12,5	0,1469	-0,1655
2,6	-0,0968	0,4708	7,6	0,2516	0,1592	12,6	0,1626	-0,1487
2,7	-0,1424	0,4416	7,7	0,2346	0,1813	12,7	0,1766	-0,1307
2,8	-0,1850	0,4097	7,8	0,2154	0,2014	12,8	0,1887	-0,1114
2,9	-0,2243	0,3754	7,9	0,1944	0,2192	12,9	0,1988	-0,0912
3,0	-0,2600	0,3391	8,0	0,1716	0,2346	13,0	0,2069	-0,0703
3,1	-0,2921	0,3009	8,1	0,1475	0,2476	13,1	0,2129	-0,0488
3,2	-0,3202	0,2613	8,2	0,1220	0,2580	13,2	0,2167	-0,0271
3,3	-0,3443	0,2207	8,3	0,0960	0,2657	13,3	0,2183	-0,0052
3,4	-0,3643	0,1792	8,4	0,0692	0,2708	13,4	0,2177	0,0166
3,5	-0,3801	0,1374	8,5	0,0419	0,2731	13,5	0,2150	0,0380
3,6	-0,3918	0,0955	8,6	0,0146	0,2728	13,6	0,2101	0,0590
3,7	-0,3992	0,0538	8,7	-0,0125	0,2697	13,7	0,2032	0,0791
3,8	-0,4026	0,0128	8,8	-0,0392	0,2641	13,8	0,1943	0,0984
3,9	-0,4018	-0,0272	8,9	-0,0652	0,2559	13,9	0,1836	0,1165
4,0	-0,3971	-0,0660	9,0	-0,0903	0,2453	14,0	0,1711	0,1334
4,1	-0,3887	-0,1033	9,1	-0,1142	0,2324	14,1	0,1570	0,1488
4,2	-0,3766	-0,1386	9,2	-0,1368	0,2174	14,2	0,1414	0,1626
4,3	-0,3610	-0,1719	9,3	-0,1577	0,2004	14,3	0,1245	0,1747
4,4	-0,3423	-0,2028	9,4	-0,1768	0,1816	14,4	0,1065	0,1850
4,5	-0,3205	-0,2311	9,5	-0,1939	0,1613	14,5	0,0875	0,1934
4,6	-0,2961	-0,2666	9,6	-0,2090	0,1395	14,6	0,0679	0,1989
4,7	-0,2693	-0,2791	9,7	-0,2218	0,1116	14,7	0,0476	0,2043
4,8	-0,2404	-0,2985	9,8	-0,2323	0,0928	14,8	0,0271	0,2066
4,9	-0,2097	-0,3147	9,9	-0,2403	0,0684	14,9	0,0064	0,2069
						15,0	-0,0142	0,2051

## 2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ 2 РОДА

Обобщенная расчетная формула

$$\Theta''(X, Fo) = k \cdot Fo + \frac{X^2}{2} - \frac{k}{2(k+2)} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_2(v_n X)}{v_n^2} \exp(-v_n^2 \cdot Fo). \quad (2.1)$$

Лямбда-функция

$$\Lambda_2(v_n X) = \frac{X^{\frac{2-k}{2}} J_{\frac{k-2}{2}}(v_n X)}{J_{\frac{k-2}{2}}(v_n)}. \quad (2.2)$$

Характеристическое уравнение

$$J_{\frac{k}{2}}(v_n) = 0. \quad (2.3)$$

### 2.1. Температурное поле неограниченной пластины при граничных условиях 2 рода

#### 2.1.1. Характеристическое уравнение и его корни

$$\sin(v_n) = 0; \quad (2.4)$$

$$v_n = n \cdot \pi \quad \text{для } n=1, 2, \dots, \infty. \quad (2.5)$$

#### 2.1.2. Лямбда-функция

$$\Lambda_2(v_n X) = (-1)^n \cos(v_n X). \quad (2.6)$$

#### 2.1.3. Точное аналитическое решение

$$\Theta''(X, Fo) = Fo + \frac{X^2}{2} - \frac{1}{6} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(v_n X)}{v_n^2} \exp[-v_n^2 Fo]. \quad (2.7)$$

#### 2.1.4. Приближенное решение при $Fo \geq 0,25$ (используется только первый член бесконечного ряда ( $n=1$ ))

$$\Theta''(X, Fo) = Fo + \frac{X^2}{2} - \frac{1}{6} + \frac{2}{\pi^2} \cos(\pi \cdot X) \exp[-\pi^2 Fo]. \quad (2.8)$$

Безразмерная температура в характерных точках при  $Fo \geq 0,25$

$$\Theta''(0, Fo) = Fo - \frac{1}{6} + \frac{2}{\pi^2} \cdot \exp[-\pi^2 Fo]; \quad (2.9)$$

$$\Theta''(1, Fo) = Fo + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \cdot \exp[-v_n^2 Fo]. \quad (2.10)$$

**2.1.5. Аналитическое решение для регулярного (квазистационарного) режима теплопроводности ( $Fo \geq 0,5$ )**

$$\Theta''(X, Fo) = Fo + \frac{X^2}{2} - \frac{1}{6}. \quad (2.11)$$

Безразмерная температура в характерных точках при регулярном режиме

$$\Theta''(0, Fo) = Fo - \frac{1}{6}; \quad (2.12)$$

$$\Theta''(1, Fo) = Fo + \frac{1}{3}. \quad (2.13)$$

Максимальный перепад температуры по сечению при регулярном режиме

$$\Delta\Theta'' = \Theta''(1, Fo) - \Theta''(0, Fo) = \frac{1}{2}$$

или

$$\Delta T = T(1, Fo) - T(0, Fo) = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_w \cdot R}{\lambda}. \quad (2.14)$$

Время отставания температуры в тепловом центре от температуры на поверхности при регулярном режиме

$$\Delta Fo = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \Delta \tau = \frac{1}{2} \frac{R^2}{a}. \quad (2.15)$$

**2.2. Температурное поле неограниченного цилиндра при граничных условиях 2 рода**

**2.2.1. Характеристическое уравнение и его корни**

$$J_1(v_n) = 0. \quad (2.16)$$

Значения первых десяти ( $n=1 \dots 10$ ) корней уравнения (2.16) равны:  
 $v_1=3,83171$ ;  $v_2=7,01559$ ;  $v_3=10,17347$ ;  $v_4=13,32369$ ;  $v_5=16,47063$ ;  
 $v_6=19,61586$ ;  $v_7=22,76008$ ;  $v_8=25,90367$ ;  $v_9=29,04683$ ;  $v_{10}=32,18968$ .

**2.2.2. Лямбда-функция**

$$\Lambda_2(v_n X) = \frac{J_0(v_n X)}{J_0(v_n)}. \quad (2.17)$$

### 2.2.3. Точное аналитическое решение

$$\Theta''(X, Fo) = 2 \cdot Fo + \frac{X^2}{2} - \frac{1}{4} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(v_n \cdot X)}{v_n^2 \cdot J_0(v_n)} \cdot \exp[-(v_n)^2 \cdot Fo]. \quad (2.18)$$

Значения функций Бесселя  $J_0(u)$  и  $J_1(u)$  приведены в табл. 1.1.

### 2.2.4. Приближенное решение при $Fo \geq 0,125$ (используется только первый член бесконечного ряда ( $n=1$ ))

$$\Theta''(X, Fo) = 2 \cdot Fo - \frac{1}{4} (1 - 2X^2) + 0,3382 \cdot J_0(3,8317 \cdot X) \cdot \exp(-14,682 \cdot Fo). \quad (2.19)$$

Безразмерная температура в характерных точках при  $Fo \geq 0,125$

$$\Theta''(0, Fo) = 2 \cdot Fo - \frac{1}{4} + 0,3382 \cdot \exp(-14,682 \cdot Fo); \quad (2.20)$$

$$\Theta''(1, Fo) = 2 \cdot Fo + \frac{1}{4} - 0,136 \cdot \exp(-14,682 \cdot Fo). \quad (2.21)$$

### 2.2.5. Аналитическое решение для регулярного (квазистационарного) режима теплопроводности ( $Fo \geq 0,25$ )

$$\Theta''(X, Fo) = 2 \cdot Fo + \frac{X^2}{2} - \frac{1}{4}. \quad (2.22)$$

Безразмерная температура в характерных точках при регулярном режиме

$$\Theta''(0, Fo) = 2 \cdot Fo - \frac{1}{4}; \quad (2.23)$$

$$\Theta''(1, Fo) = 2 \cdot Fo + \frac{1}{4}. \quad (2.24)$$

Максимальный перепад температуры по сечению при регулярном режиме

$$\Delta\Theta'' = \Theta''(1, Fo) - \Theta''(0, Fo) = \frac{1}{2}$$

или

$$\Delta T = T(1, Fo) - T(0, Fo) = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_w \cdot R}{\lambda}. \quad (2.25)$$

Время отставания температуры в тепловом центре от температуры на поверхности при регулярном режиме

$$\Delta Fo = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad \Delta\tau = \frac{1}{4} \frac{R^2}{a}. \quad (2.26)$$

### 2.3. Температурное поле шара при граничных условиях 2 рода

#### 2.3.1. Характеристическое уравнение и его корни

$$\operatorname{tg}(v_n) = v_n. \quad (2.27)$$

Значения первых десяти ( $n=1 \dots 10$ ) корней уравнения (2.27) равны:  
 $v_1=4,4934$ ;  $v_2=7,7253$ ;  $v_3=10,9041$ ;  $v_4=14,0662$ ;  $v_5=17,2208$ ;  
 $v_6=20,3713$ ;  $v_7=23,51945$ ;  $v_8=26,66605$ ;  $v_9=29,81160$ ;  $v_{10}=32,956390$ .

#### 2.3.2. Лямбда-функция

$$\Lambda_2(v_n X) = \frac{\sin(v_n X)}{X \cdot \sin(v_n)}. \quad (2.28)$$

#### 2.3.3. Точное аналитическое решение ( $X > 0$ )

$$\Theta''(X, Fo) = 3 \cdot Fo + \frac{X^2}{2} - \frac{3}{10} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(v_n X)}{v_n^2 \cdot X \cdot \sin(v_n)} \exp[-(v_n)^2 Fo]. \quad (2.29)$$

Для  $X = 0$  (центр шара) точное аналитическое решение имеет вид

$$\Theta''(0, Fo) = 3 \cdot Fo - \frac{3}{10} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{v_n \cdot \sin(v_n)} \exp[-(v_n)^2 Fo]. \quad (2.30)$$

#### 2.3.4. Приближенное решение при $Fo \geq 0,167$ (используется только первый член бесконечного ряда ( $n=1$ ))

$$\Theta''(X, Fo) = 3 \cdot Fo + \frac{X^2}{2} - \frac{3}{10} + \frac{\sin(4,4934 \cdot X)}{9,8539 \cdot X} \exp[-20,191 \cdot Fo]. \quad (2.31)$$

Безразмерная температура в характерных точках при  $Fo \geq 0,167$

$$\Theta''(0, Fo) = 3 \cdot Fo - 0,3 + 0,456 \cdot \exp(-20,191 \cdot Fo); \quad (2.32)$$

$$\Theta''(1, Fo) = 3 \cdot Fo + 0,2 - 0,0991 \cdot \exp(-20,191 \cdot Fo). \quad (2.33)$$

#### 2.3.5. Аналитическое решение для регулярного (квазистационарного) режима теплопроводности ( $Fo \geq 0,167$ )

$$\Theta''(X, Fo) = 3 \cdot Fo + \frac{X^2}{2} - \frac{3}{10}. \quad (2.34)$$

Безразмерная температура в характерных точках при регулярном режиме

$$\Theta''(0, Fo) = 3 \cdot Fo - 0,3; \quad (2.35)$$

$$\Theta''(1, Fo) = 3 \cdot Fo + 0,2. \quad (2.36)$$

Максимальный перепад температуры по сечению при регулярном режиме

$$\Delta\Theta'' = \Theta''(1, Fo) - \Theta''(0, Fo) = \frac{1}{2}$$

или

$$\Delta T = T(1, Fo) - T(0, Fo) = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_w \cdot R}{\lambda}. \quad (2.37)$$

Время отставания температуры в тепловом центре от температуры на поверхности при регулярном режиме

$$\Delta Fo = \frac{1}{6} \quad \text{или} \quad \Delta \tau = \frac{1}{6} \frac{R^2}{a}. \quad (2.38)$$

### 3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ 3 РОДА

Обобщенная расчетная формула

$$\Theta'''(X, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \Lambda_2(\mu_n X) \exp(-\mu_n^2 \cdot Fo), \quad (3.1)$$

Коэффициент уравнения

$$A_n = \frac{2 \cdot Bi}{Bi^2 + (2 - k)Bi + \mu_n^2}.$$

Лямбда-функция

$$\Lambda_2(\mu_n X) = \frac{X^{\frac{2-k}{2}} J_{\frac{k-2}{2}}(\mu_n X)}{J_{\frac{k-2}{2}}(\mu_n)}. \quad (3.2)$$

Характеристическое уравнение

$$Bi \cdot J_{\frac{k-2}{2}}(\mu_n) = \mu_n \cdot J_{\frac{k}{2}}(\mu_n). \quad (3.3)$$

При  $Bi \rightarrow \infty$  ( $Bi > 100$ ) характеристическое уравнение (3.3) преобразуется в уравнение (1.5). Таким образом, задача теплопроводности при граничных условиях третьего рода сводится к задаче теплопроводности при граничных условиях первого рода. Расчеты ведут по формулам раздела 1, полагая, что температура поверхности тела равна температуре омывающей его среды ( $T_w = T_f$ ).

Аналитическое решение при  $Bi \rightarrow 0$  ( $Bi < 0,1$ )

$$\Theta'''(X, Fo) = \exp(-k \cdot Bi \cdot Fo). \quad (3.4)$$

### 3.1. Температурное поле неограниченной пластины при граничных условиях 3 рода

#### 3.1.1. Характеристическое уравнение и его корни

$$\operatorname{tg}(\mu_n) = \frac{Bi}{\mu_n}. \quad (3.5)$$

Значения первых шести ( $n=1 \dots 6$ ) корней уравнения (3.5) в зависимости от критерия  $Bi$  приведены в табл. 3.1.

#### 3.1.2. Лямбда-функция

$$\Lambda_2(\mu_n X) = \frac{\cos(\mu_n X)}{\cos(\mu_n)}. \quad (3.6)$$

$$A_n = \frac{2 \cdot Bi}{Bi^2 + Bi + \mu_n^2}.$$

#### 3.1.3. Точное аналитическое решение

$$\Theta'''(X, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot Bi}{Bi^2 + Bi + \mu_n^2} \frac{\cos(\mu_n X)}{\cos(\mu_n)} \exp[-(\mu_n)^2 Fo]. \quad (3.7)$$

#### 3.1.4. Аналитическое решение для регулярного режима теплопроводности при $Fo \geq 0,3$

$$\Theta'''(X, Fo) = A_1 \cdot \Lambda_2(\mu_1 X) \cdot \exp[-(\mu_1)^2 \cdot Ft],$$

$$\text{где } A_1 = \frac{2 \cdot Bi}{Bi^2 + Bi + \mu_1^2}; \quad \Lambda_2(\mu_1 X) = \frac{\cos(\mu_1 X)}{\cos(\mu_1)}.$$

Для удобства расчетов безразмерную относительную температуру записывают в виде

$$\Theta'''(X, Fo) = N_n \cos(\mu_1 X) \exp[-(\mu_1)^2 Fo], \quad (3.8)$$

$$\text{где } N_n = A_1 / \cos(\mu_1).$$

Безразмерная температура в характерных точках при  $Fo \geq 0,3$

$$\Theta'''(0, Fo) = N_n \cdot \exp(-(\mu_1)^2 \cdot Fo); \quad (3.9)$$

$$\Theta'''(1, Fo) = P_n \cdot \exp(-(\mu_1)^2 \cdot Fo), \quad (3.10)$$

$$\text{где } P_n = \dot{A}_1 = N_n \cdot \cos(\mu_1).$$

Значения величин  $N_n$ ,  $P_n$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_1^2 = f(Bi)$  приведены в табл. 3.2.



Решение (3.9) для теплового центра пластины представлено в виде номограммы  $\Theta'''_{x=0} = f(Fo, Bi)$  на рис. 3.1, а также на рис. 3.3,а для малых значений  $Fo$ . Решение (3.10) для поверхности пластины представлено в виде номограммы  $\Theta'''_{x=1} = f(Fo, Bi)$  на рис. 3.2, а также на рис. 3.3,б для малых значений  $Fo$ .

Таблица 3.1

Корни характеристического уравнения (3.5) для неограниченной пластины

$Bi$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\mu_5$	$\mu_6$
0,00	0,0000	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080
0,001	0,0316	3,1419	6,2833	9,4249	12,5665	15,7080
0,002	0,0447	3,1422	6,2835	9,4250	12,5665	15,7081
0,004	0,0632	3,1429	6,2838	9,4252	12,5667	15,7082
0,006	0,0774	3,1435	6,2841	9,4254	12,5668	15,7083
0,008	0,0893	3,1441	6,2845	9,4256	12,5670	15,7085
0,01	0,0998	3,1448	6,2848	9,4258	12,5672	15,7086
0,02	0,1410	3,1479	6,2864	9,4269	12,5680	15,7092
0,04	0,1987	3,1543	6,2895	9,4290	12,5696	15,7105
0,06	0,2425	3,1606	6,2927	9,4311	12,5711	15,7118
0,08	0,2791	3,1668	6,2959	9,4333	12,5727	15,7131
0,1	0,3111	3,1731	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143
0,2	0,4328	3,2039	6,3148	9,4459	12,5823	15,7207
0,3	0,5218	3,2341	6,3305	9,4565	12,5902	15,7270
0,4	0,5932	3,2636	6,3461	9,4670	12,5981	15,7334
0,5	0,6533	3,2923	6,3616	9,4775	12,6060	15,7397
0,6	0,7051	3,3204	6,3770	9,4879	12,6139	15,7460
0,7	0,7506	3,3477	6,3923	9,4983	12,6218	15,7524
0,8	0,7910	3,3744	6,4074	9,5087	12,6296	15,7587
0,9	0,8274	3,4003	6,4224	9,5190	12,6375	15,7650
1,0	0,8603	3,4256	6,4373	9,5293	12,6453	15,7713
1,5	0,9882	3,5422	6,5097	9,5801	12,6841	15,8026
2,0	1,0769	3,6436	6,5783	9,6296	12,7223	15,8336
3,0	1,1925	3,8088	6,7040	9,7240	12,7966	15,8945
4,0	1,2646	3,9352	6,8140	9,8119	12,8678	15,9536
5,0	1,3138	4,0336	6,9096	9,8928	12,9352	16,0107
6,0	1,3496	4,1116	6,9924	9,9667	12,9988	16,0654
7,0	1,3766	4,1746	7,0640	10,0339	13,0584	16,1177
8,0	1,3978	4,2264	7,1263	10,0949	13,1141	16,1675

Окончание табл. 3.1

Bi	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\mu_5$	$\mu_6$
9,0	1,4149	4,2694	7,1806	10,1502	13,1660	16,2147
10	1,4289	4,3058	7,2281	10,2003	13,2142	16,2594
15	1,4729	4,4255	7,3959	10,3898	13,4078	16,4474
20	1,4961	4,4915	7,4954	10,5117	13,5420	16,5864
30	1,5202	4,5615	7,6057	10,6543	13,7085	16,7691
40	1,5325	4,5979	7,6647	10,7334	13,8048	16,8794
50	1,5400	4,6202	7,7012	10,7832	13,8666	16,9519
60	1,5451	4,6353	7,7259	10,8172	13,9094	17,0026
80	1,5514	4,6543	7,7573	10,8606	13,9644	17,0686
100	1,5552	4,6658	7,7764	10,8871	13,9981	17,1093
$\infty$	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788

Таблица 3.2

Коэффициенты уравнений (3.9), (3.10) для расчета температуры  
в характерных точках неограниченной пластины при  $Fo \geq 0,3$

Bi	$\mu_1$	$\mu_1^2$	$N_{\pi}$	$P_{\pi}$	Bi	$\mu_1$	$\mu_1^2$	$N_{\pi}$	$P_{\pi}$
0,00	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000	2,2	1,1052	1,2216	1,1864	0,5326
0,01	0,0998	0,0100	1,0017	0,9967	2,4	1,1306	1,2782	1,1934	0,5086
0,02	0,1409	0,0199	1,0033	0,9934	2,6	1,1533	1,3301	1,1997	0,4864
0,04	0,1987	0,0395	1,0066	0,9868	2,8	1,1738	1,3779	1,2052	0,4660
0,06	0,2425	0,0588	1,0098	0,9802	3,0	1,1925	1,4220	1,2102	0,4470
0,08	0,2791	0,0779	1,0130	0,9738	3,5	1,2323	1,5185	1,2206	0,4054
0,10	0,3111	0,0968	1,0161	0,9673	4,0	1,2646	1,5992	1,2287	0,3704
0,12	0,3396	0,1154	1,0192	0,9610	4,5	1,2913	1,6676	1,2351	0,3407
0,14	0,3657	0,1337	1,0222	0,9546	5,0	1,3138	1,7262	1,2402	0,3152
0,16	0,3896	0,1518	1,0252	0,9484	5,5	1,3330	1,7769	1,2444	0,2931
0,18	0,4119	0,1697	1,0282	0,9422	6,0	1,3496	1,8213	1,2479	0,2738
0,20	0,4328	0,1874	1,0311	0,9360	7,0	1,3766	1,8951	1,2532	0,2418
0,22	0,4525	0,2048	1,0340	0,9299	8,0	1,3978	1,9539	1,2570	0,2164
0,24	0,4711	0,2220	1,0368	0,9238	9,0	1,4149	2,0018	1,2598	0,1956
0,26	0,4888	0,2390	1,0396	0,9178	10	1,4289	2,0417	1,2620	0,1785
0,28	0,5057	0,2557	1,0423	0,9119	12	1,4505	2,1040	1,2650	0,1518
0,30	0,5218	0,2723	1,0450	0,9060	14	1,4664	2,1504	1,2669	0,1320
0,35	0,5592	0,3127	1,0517	0,8915	16	1,4786	2,1864	1,2683	0,1167

Окончание табл. 3.2

Bi	$\mu_1$	$\mu_1^2$	$N_{\pi}$	$P_{\pi}$		Bi	$\mu_1$	$\mu_1^2$	$N_{\pi}$	$P_{\pi}$
0,40	0,5932	0,3519	1,0580	0,8773		18	1,4883	2,2150	1,2692	0,1046
0,45	0,6244	0,3899	1,0642	0,8634		20	1,4961	2,2384	1,2699	0,0947
0,50	0,6533	0,4268	1,0701	0,8498		25	1,5105	2,2815	1,2710	0,0767
0,55	0,6801	0,4625	1,0759	0,8365		30	1,5202	2,3109	1,2717	0,0644
0,6	0,7051	0,4971	1,0814	0,8235		35	1,5272	2,3323	1,2721	0,0555
0,7	0,7506	0,5633	1,0918	0,7985		40	1,5325	2,3486	1,2723	0,0487
0,8	0,7910	0,6257	1,1016	0,7745		50	1,5400	2,3716	1,2727	0,0392
0,9	0,8274	0,6846	1,1107	0,7517		60	1,5451	2,3872	1,2728	0,0328
1,0	0,8603	0,7402	1,1191	0,7299		70	1,5487	2,3984	1,2729	0,0282
1,2	0,9178	0,8424	1,1344	0,6892		80	1,5514	2,4069	1,2730	0,0247
1,4	0,9665	0,9342	1,1477	0,6520		90	1,5535	2,4135	1,2731	0,0220
1,6	1,0084	1,0169	1,1593	0,6181		100	1,5552	2,4188	1,2731	0,0198
1,8	1,0449	1,0917	1,1695	0,5871		$\infty$	1,5708	2,4674	1,2732	0,0000
2,0	1,0769	1,1597	1,1785	0,5587						

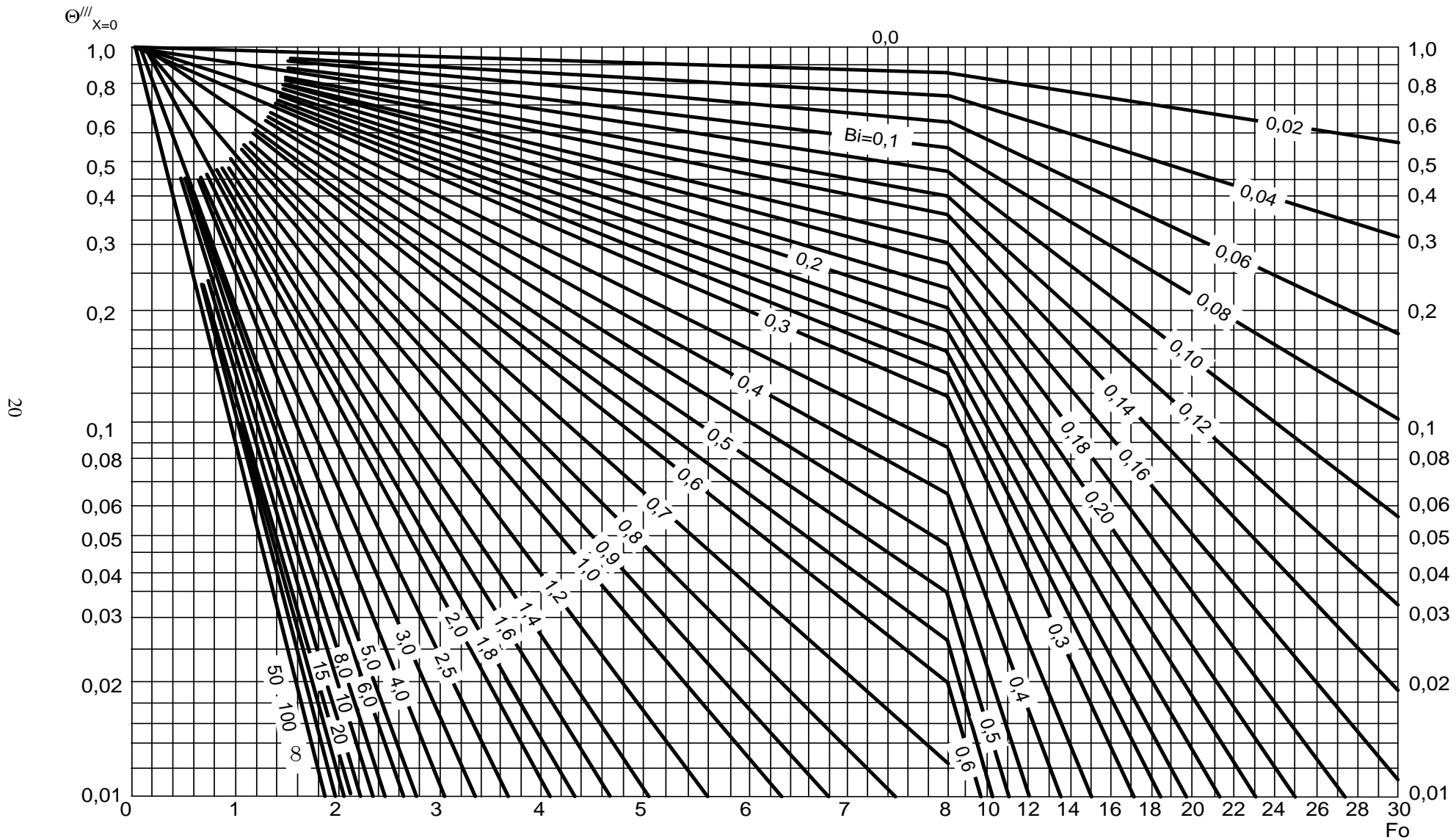


Рис. 3.1. Безразмерная температура в тепловом центре неограниченной пластины

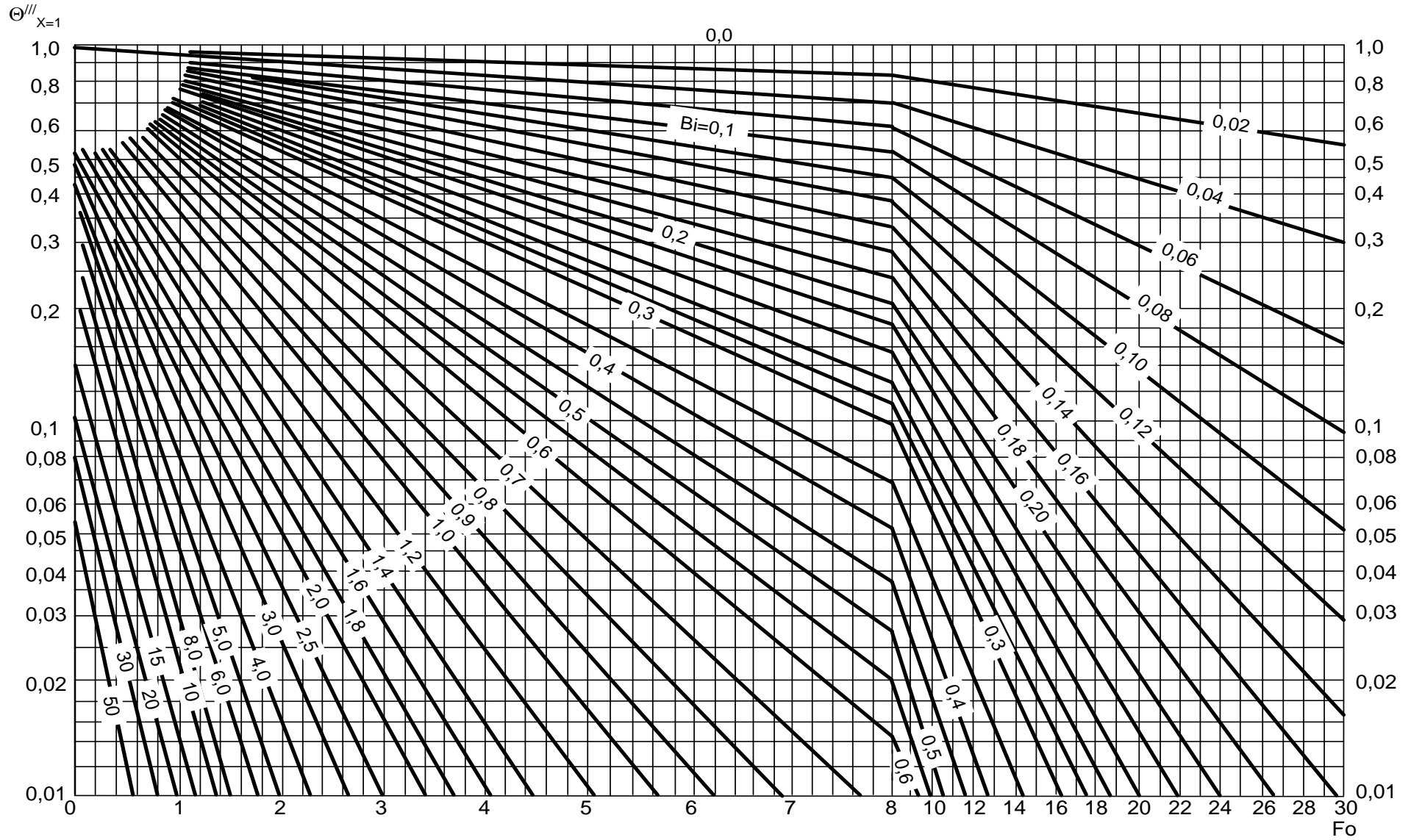
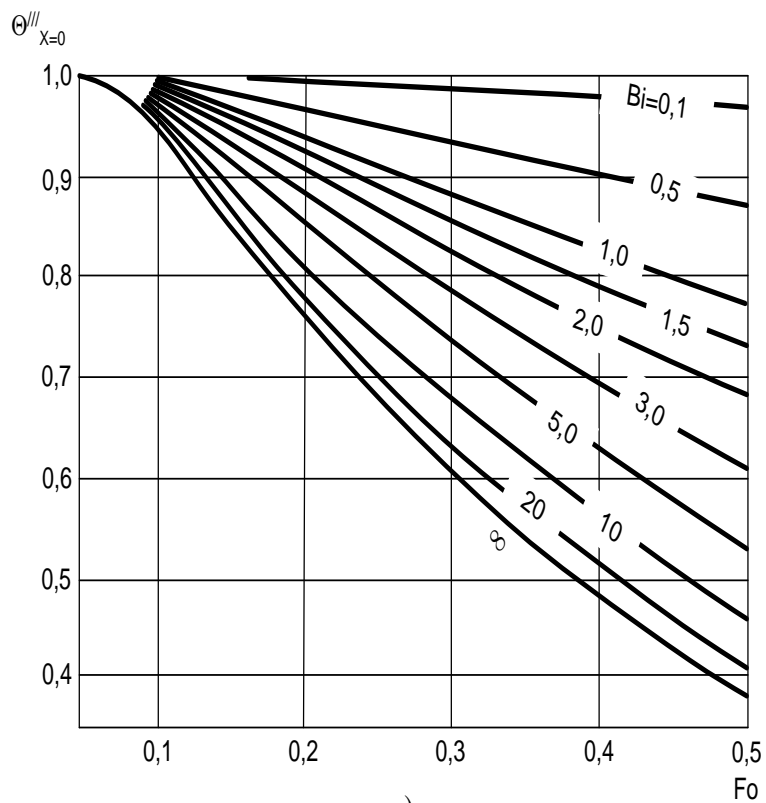
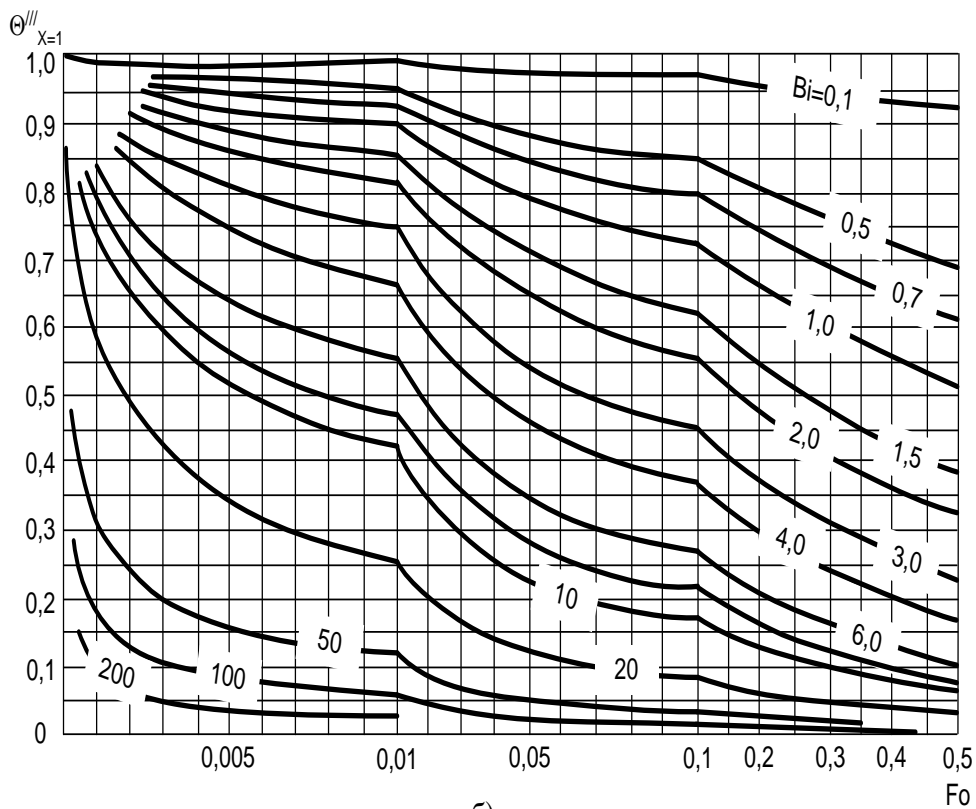


Рис. 3.2. Безразмерная температура на поверхности неограниченной пластины



a)



б)

Рис. 3.3. Безразмерная температура бесконечной пластины при малых значениях  $Fo$ : а – в тепловом центре; б – на поверхности

## 3.2. Температурное поле неограниченного цилиндра при граничных условиях 3 рода

### 3.2.1. Характеристическое уравнение и его корни

$$\frac{J_0(\mu_n)}{J_1(\mu_n)} = \frac{\mu_n}{Bi}. \quad (3.11)$$

Значения первых шести ( $n=1 \dots 6$ ) корней уравнения (3.11) в зависимости от критерия  $Bi$  приведены в табл. 3.3.

### 3.2.2. Лямбда-функция

$$\Lambda_2(\mu_n X) = \frac{J_0(\mu_n X)}{J_0(\mu_n)}; \quad A_n = \frac{2 \cdot Bi}{Bi^2 + \mu_n^2}.$$

### 3.2.3. Точное аналитическое решение

$$\Theta'''(X, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot Bi}{Bi^2 + \mu_n^2} \frac{J_0(\mu_n X)}{J_0(\mu_n)} \exp[-(\mu_n)^2 Fo]. \quad (3.13)$$

### 3.2.4. Аналитическое решение для регулярного режима теплопроводности при $Fo \geq 0,17$

$$\Theta'''(X, Fo) = A_1 \cdot \Lambda_2(\mu_1 X) \cdot \exp[-(\mu_1)^2 \cdot Ft],$$

$$\text{где } A_1 = \frac{2 \cdot Bi}{Bi^2 + \mu_1^2}; \quad \Lambda_2(\mu_1 X) = \frac{J_0(\mu_1 X)}{J_0(\mu_1)}.$$

Для удобства расчетов безразмерную температуру записывают в виде

$$\Theta'''(X, Fo) = N_{\text{ц}} \cdot J_0(\mu_1 X) \exp[-(\mu_1)^2 Fo], \quad (3.14)$$

$$\text{где } N_{\text{ц}} = \frac{A_1}{J_0(\mu_1)}.$$

Безразмерная температура в характерных точках при  $Fo \geq 0,17$

$$\Theta'''(0, Fo) = N_{\text{ц}} \cdot \exp(-(\mu_1)^2 \cdot Fo); \quad (3.15)$$

$$\Theta'''(1, Fo) = P_{\text{ц}} \cdot \exp(-(\mu_1)^2 \cdot Fo), \quad (3.16)$$

$$\text{где } P_{\text{ц}} = A_1 = N_{\text{ц}} \cdot J_0(\mu_1).$$

Значения величин  $N_{\text{ц}}$ ,  $P_{\text{ц}}$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_1^2 = f(Bi)$  приведены в табл. 3.4.

Решение (3.15) для оси цилиндра представлено в виде номограммы  $\Theta'''_{X=0} = f(Fo, Bi)$  на рис. 3.4, а также на рис. 3.6,а для малых значений  $Fo$ .

Решение (3.16) для поверхности цилиндра представлено в виде номограммы  $\Theta'''_{X=1} = f(Fo, Bi)$  на рис. 3.5, а также на рис. 3.6,б для малых значений  $Fo$ .

Таблица 3.3

Корни характеристического уравнения (3.11) для неограниченного цилиндра

$B_i$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\mu_5$	$\mu_6$
0,00	0,0000	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706
0,01	0,1412	3,8343	7,0170	10,1745	13,3244	16,4712
0,02	0,1995	3,8369	7,0184	10,1754	13,3252	16,4718
0,04	0,2814	3,8421	7,0213	10,1774	13,3267	16,4731
0,06	0,3438	3,8473	7,0241	10,1794	13,3282	16,4743
0,08	0,3960	3,8525	7,0270	10,1813	13,3297	16,4755
0,10	0,4417	3,8577	7,0298	10,1833	13,3312	16,4767
0,15	0,5376	3,8706	7,0369	10,1882	13,3349	16,4797
0,2	0,6170	3,8835	7,0440	10,1931	13,3387	16,4828
0,3	0,7465	3,9091	7,0582	10,2029	13,3462	16,4888
0,4	0,8516	3,9344	7,0723	10,2127	13,3537	16,4949
0,5	0,9408	3,9594	7,0864	10,2225	13,3611	16,5010
0,6	1,0184	3,9841	7,1004	10,2322	13,3686	16,5070
0,7	1,0873	4,0085	7,1143	10,2419	13,3761	16,5131
0,8	1,1490	4,0325	7,1282	10,2519	13,3835	16,5191
0,9	1,2048	4,0562	7,1421	10,2613	13,3910	16,5251
1,0	1,2558	4,0795	7,1558	10,2710	13,3984	16,5312
1,5	1,4569	4,1902	7,2233	10,3188	13,4353	16,5612
2,0	1,5994	4,2910	7,2884	10,3658	13,4719	16,5910
3,0	1,7887	4,4634	7,4103	10,4566	13,5434	16,6499
4,0	1,9081	4,6018	7,5201	10,5423	13,6125	16,7073
5,0	1,9898	4,7131	7,6177	10,6223	13,6786	16,7630
6,0	2,0490	4,8033	7,7039	10,6964	13,7414	16,8168
7,0	2,0937	4,8772	7,7797	10,7646	13,8008	16,8684
8,0	2,1286	4,9384	7,8464	10,8271	13,8566	16,9179
9,0	2,1566	4,9897	7,9051	10,8842	13,9090	16,9650
10	2,1795	5,0332	7,9569	10,9363	13,9580	17,0099
15	2,2509	5,1773	8,1422	11,1367	14,1576	17,2008
20	2,2880	5,2568	8,2534	11,2677	14,2983	17,3442
30	2,3261	5,3410	8,3771	11,4221	14,4748	17,5348
40	2,3455	5,3846	8,4432	11,5081	14,5774	17,6508
50	2,3572	5,4112	8,4840	11,5621	14,6433	17,7272



Окончание табл. 3.3

Bi	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\mu_5$	$\mu_6$
60	2,3651	5,4291	8,5116	11,5990	14,6889	17,7807
80	2,3750	5,4516	8,5466	11,6461	14,7475	17,8502
100	2,3809	5,4652	8,5678	11,6747	14,7834	17,8931
$\infty$	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711

Таблица 3.4

Коэффициенты уравнений (3.15), (3.16) для расчета температуры в характерных точках неограниченного цилиндра при  $Fo \geq 0,17$

Bi	$\mu_1$	$\mu_1^2$	$N_{\text{ц}}$	$P_{\text{ц}}$	Bi	$\mu_1$	$\mu_1^2$	$N_{\text{ц}}$	$P_{\text{ц}}$
0,00	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000	2,2	1,6456	2,7079	1,3578	0,5829
0,01	0,1412	0,0199	1,0025	0,9975	2,4	1,6869	2,8457	1,3754	0,5578
0,02	0,1995	0,0398	1,0050	0,9950	2,6	1,7242	2,9728	1,3914	0,5343
0,04	0,2814	0,0792	1,0099	0,9900	2,8	1,7579	3,0904	1,4059	0,5123
0,06	0,3438	0,1182	1,0148	0,9851	3,0	1,7887	3,1993	1,4191	0,4918
0,08	0,3960	0,1568	1,0197	0,9801	3,5	1,8545	3,4391	1,4473	0,4462
0,10	0,4417	0,1951	1,0246	0,9752	4,0	1,9081	3,6408	1,4698	0,4073
0,12	0,4826	0,2329	1,0294	0,9703	4,5	1,9525	3,8122	1,4880	0,3740
0,14	0,5200	0,2704	1,0342	0,9654	5,0	1,9898	3,9594	1,5029	0,3453
0,16	0,5546	0,3075	1,0389	0,9606	5,5	2,0216	4,0869	1,5151	0,3204
0,18	0,5868	0,3443	1,0436	0,9557	6,0	2,0490	4,1984	1,5253	0,2985
0,20	0,6170	0,3807	1,0483	0,9509	7,0	2,0937	4,3837	1,5411	0,2623
0,22	0,6455	0,4167	1,0529	0,9461	8,0	2,1286	4,5311	1,5526	0,2335
0,24	0,6726	0,4523	1,0576	0,9413	9,0	2,1566	4,6510	1,5611	0,2102
0,26	0,6983	0,4876	1,0621	0,9365	10	2,1795	4,7502	1,5677	0,1909
0,28	0,7229	0,5226	1,0667	0,9318	12	2,2147	4,9048	1,5769	0,1612
0,30	0,7465	0,5572	1,0712	0,9271	14	2,2404	5,0196	1,5828	0,1393
0,35	0,8014	0,6422	1,0823	0,9153	16	2,2601	5,1080	1,5869	0,1226
0,40	0,8516	0,7252	1,0931	0,9038	18	2,2756	5,1781	1,5898	0,1094
0,45	0,8978	0,8061	1,1038	0,8923	20	2,2880	5,2352	1,5919	0,0987
0,50	0,9408	0,8850	1,1143	0,8810	25	2,3108	5,3398	1,5954	0,0793
0,55	0,9809	0,9621	1,1245	0,8699	30	2,3261	5,4109	1,5973	0,0663
0,60	1,0184	1,0372	1,1345	0,8588	35	2,3372	5,4625	1,5985	0,0569
0,70	1,0873	1,1821	1,1539	0,8373	40	2,3455	5,5015	1,5993	0,0498
0,80	1,1490	1,3201	1,1724	0,8163	50	2,3572	5,5566	1,6002	0,0399

Окончание табл. 3.4

Bi	$\mu_1$	$\mu_1^2$	$N_{\text{ц}}$	$P_{\text{ц}}$		Bi	$\mu_1$	$\mu_1^2$	$N_{\text{ц}}$	$P_{\text{ц}}$
0,90	1,2048	1,4516	1,1902	0,7959		60	2,3651	5,5935	1,6007	0,0333
1,0	1,2558	1,5770	1,2071	0,7761		70	2,3707	5,6202	1,6011	0,0286
1,2	1,3456	1,8106	1,2387	0,7383		80	2,3749	5,6403	1,6013	0,0250
1,4	1,4224	2,0233	1,2673	0,7029		90	2,3782	5,6560	1,6014	0,0222
1,6	1,4892	2,2176	1,2934	0,6698		100	2,3809	5,6686	1,6015	0,0200
1,8	1,5477	2,3953	1,3170	0,6388		$\infty$	2,4049	5,7833	1,6020	0,0000
2,0	1,5994	2,5582	1,3384	0,6099						

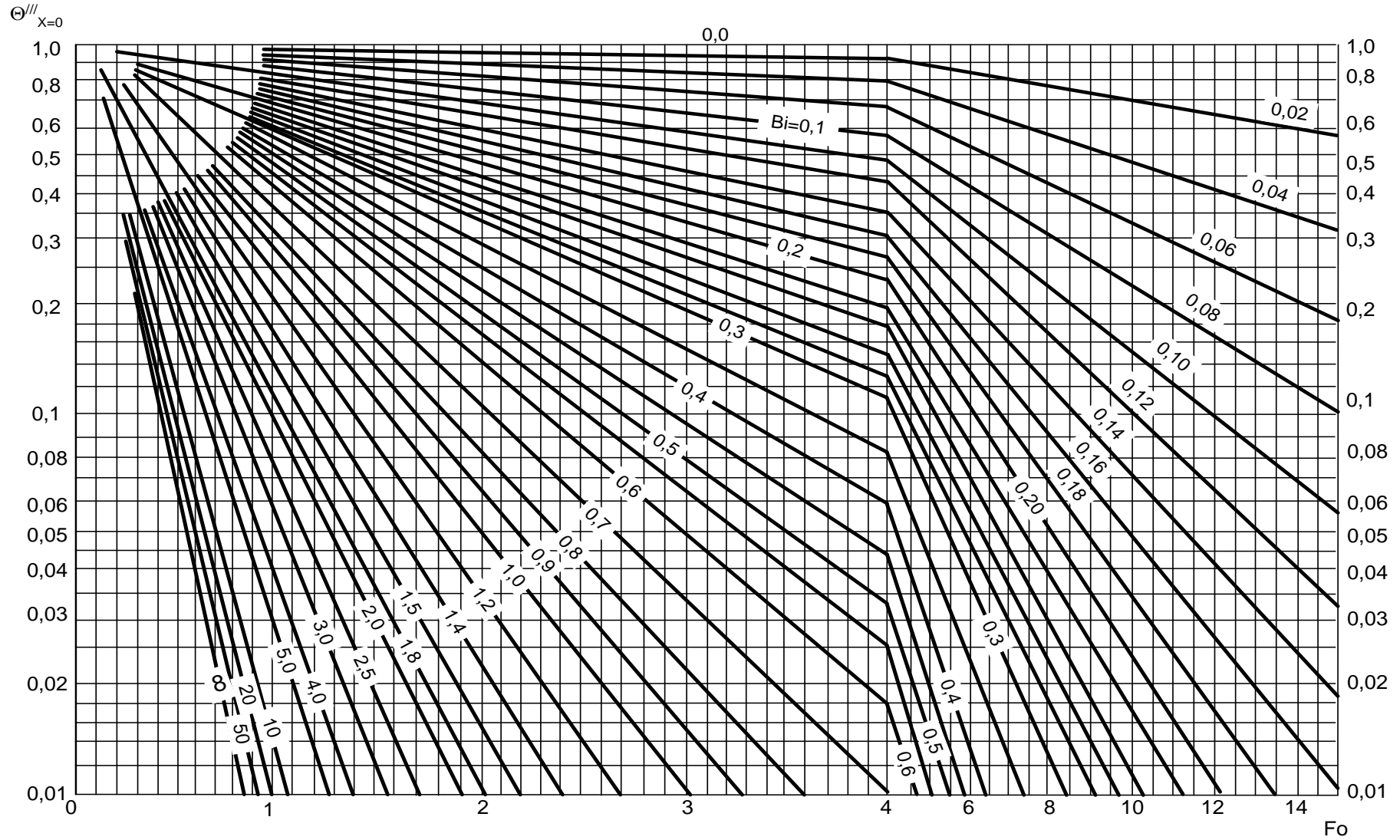


Рис. 3.4. Безразмерная температура на оси неограниченного цилиндра

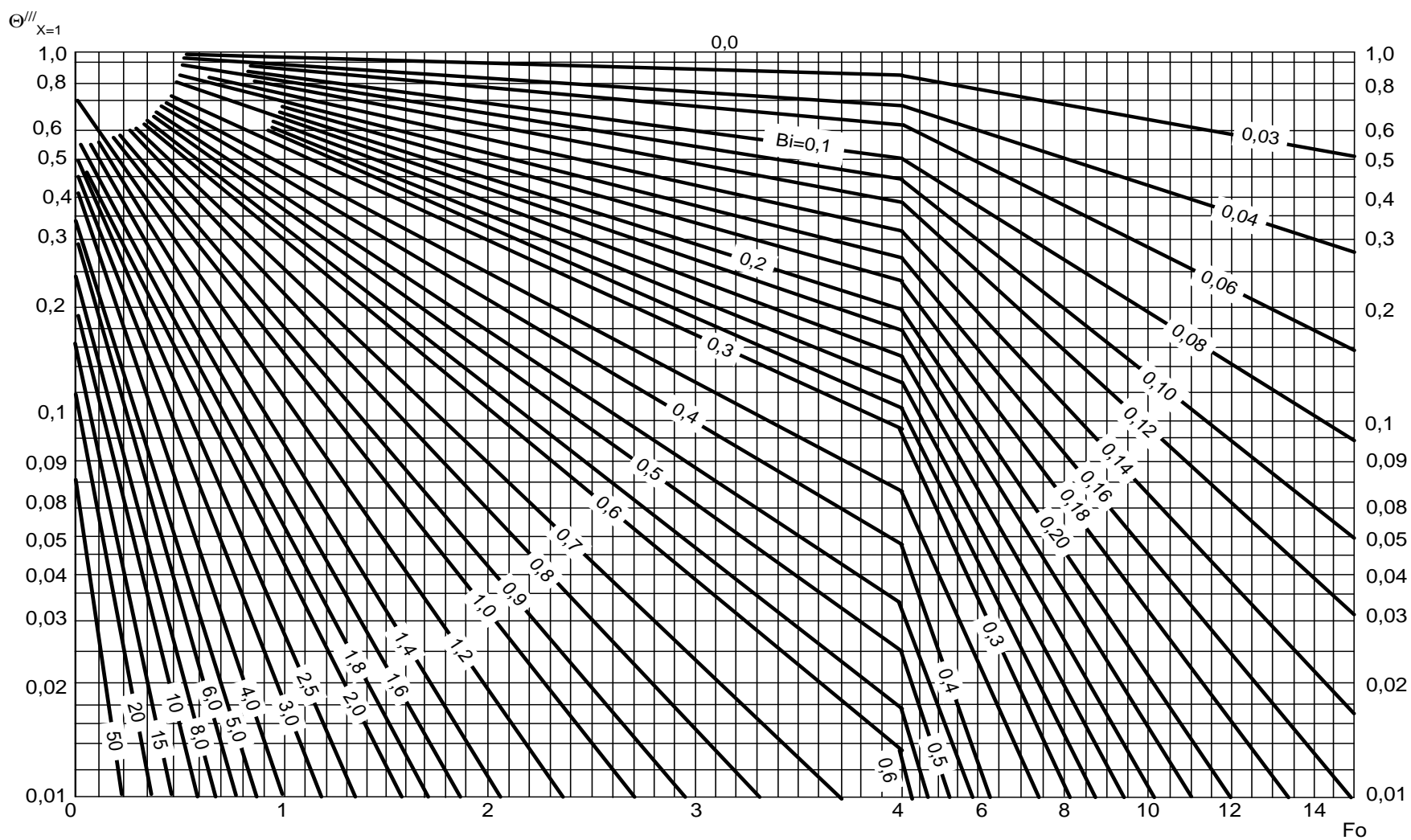
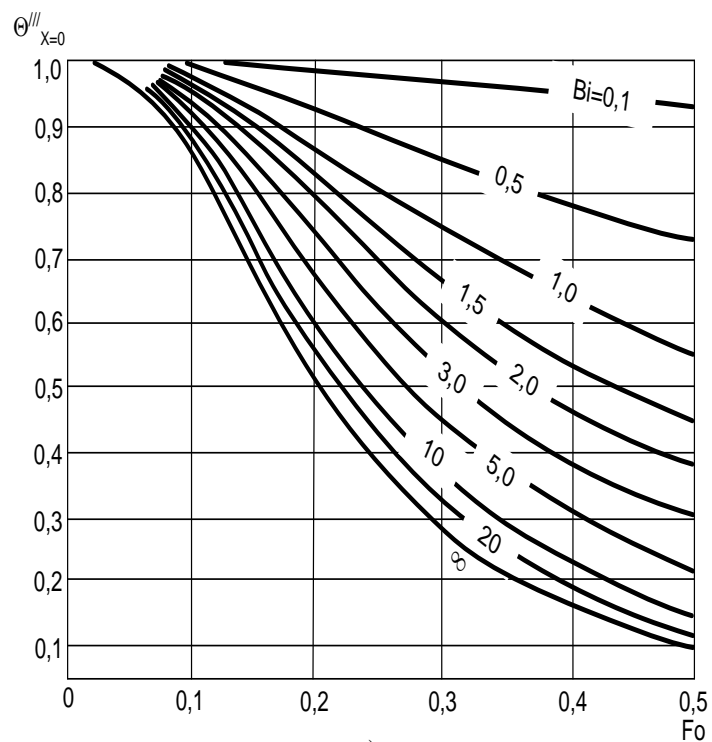
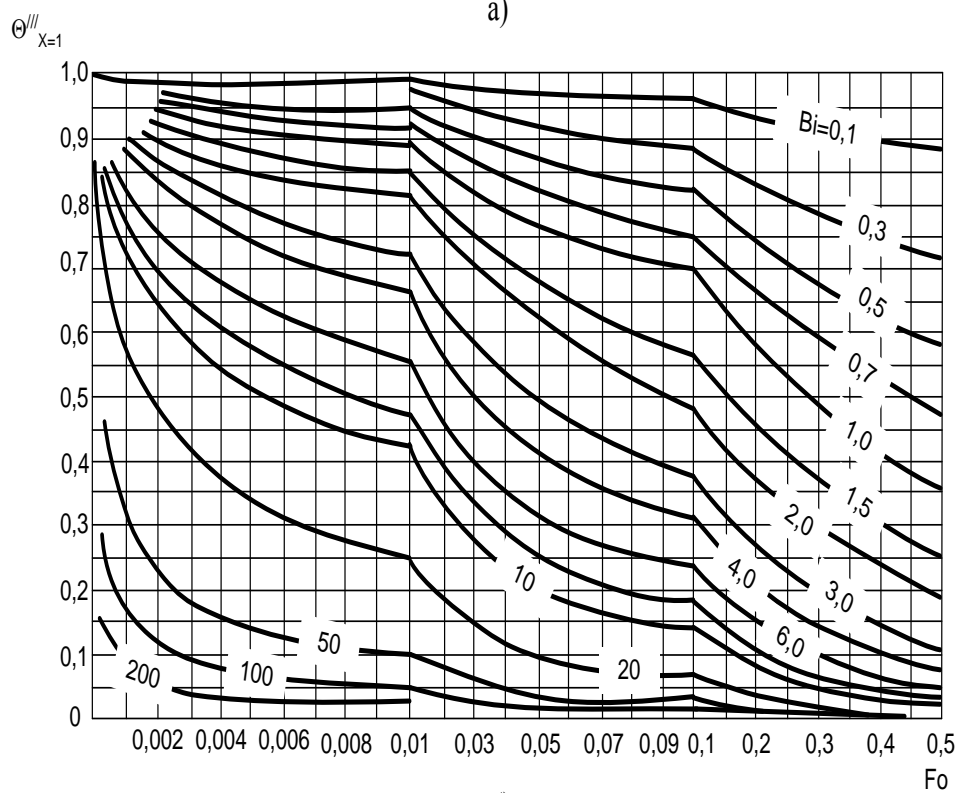


Рис. 3.5. Безразмерная температура на поверхности неограниченного цилиндра



a)



б)

Рис. 3.6. Безразмерная температура бесконечного цилиндра при малых значениях Fo: а – на оси; б – на поверхности

### 3.3. Температурное поле шара при граничных условиях 3 рода

#### 3.3.1. Характеристическое уравнение и его корни

$$\operatorname{tg}(\mu_n) = \frac{\mu_n}{1 - \operatorname{Bi}}. \quad (3.17)$$

Значения первых шести ( $n=1 \dots 6$ ) корней уравнения (3.17) в зависимости от критерия  $\operatorname{Bi}$  приведены в табл. 3.5.

#### 3.3.2. Лямбда-функция

$$\Lambda_2(\mu_n X) = \frac{\sin(\mu_n X)}{X \cdot \sin(\mu_n)}. \quad (3.18)$$

$$A_n = \frac{2 \cdot \operatorname{Bi}}{\operatorname{Bi}^2 - \operatorname{Bi} + \mu_n^2}.$$

#### 3.3.3. Точное аналитическое решение для $X > 0$

$$\Theta'''(X, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \operatorname{Bi}}{\operatorname{Bi}^2 - \operatorname{Bi} + \mu_n^2} \frac{\sin(\mu_n X)}{X \cdot \sin(\mu_n)} \exp[-(\mu_n)^2 Fo]. \quad (3.19)$$

Для  $X=0$  (центра шара) точное аналитическое решение имеет вид

$$\Theta'''(0, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \operatorname{Bi}}{\operatorname{Bi}^2 - \operatorname{Bi} + \mu_n^2} \frac{\mu_n}{\sin(\mu_n)} \exp[-(\mu_n)^2 Fo]. \quad (3.20)$$

#### 3.3.4. Аналитическое решение для регулярного режима теплопроводности при $Fo \geq 0,12$

$$\Theta'''(X, Fo) = \frac{2 \cdot \operatorname{Bi}}{\operatorname{Bi}^2 - \operatorname{Bi} + \mu_1^2} \frac{\sin(\mu_1 X)}{X \cdot \sin(\mu_1)} \exp[-(\mu_1)^2 Fo]; \quad (3.21)$$

$$\Theta'''(0, Fo) = \frac{2 \cdot \operatorname{Bi}}{\operatorname{Bi}^2 - \operatorname{Bi} + \mu_1^2} \frac{\mu_1}{\sin(\mu_1)} \exp[-(\mu_1)^2 Fo]; \quad (3.22)$$

$$\Theta'''(1, Fo) = \frac{2 \cdot \operatorname{Bi}}{\operatorname{Bi}^2 - \operatorname{Bi} + \mu_1^2} \exp[-(\mu_1)^2 Fo]. \quad (3.23)$$

Для удобства расчетов безразмерную температуру записывают в виде:

$$\Theta'''(X, Fo) = N_{\text{ш}} \cdot \frac{\sin(\mu_1 X)}{\mu_1 X} \exp[-(\mu_1)^2 Fo]; \quad (3.24)$$

$$\Theta'''(0, Fo) = N_{\text{ш}} \cdot \exp(-(\mu_1)^2 \cdot Fo); \quad (3.25)$$

$$\Theta'''(1, Fo) = P_{\text{ш}} \cdot \exp(-(\mu_1)^2 \cdot Fo), \quad (3.26)$$

$$\text{где } N_{\phi} = A_1 \cdot \frac{\mu_1}{\sin(\mu_1)}; \quad P_{\phi} = A_1 = N_{\phi} \cdot \frac{\sin(\mu_1)}{\mu_1}.$$

Значения величин  $N_{\text{ш}}$ ,  $P_{\text{ш}}$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_1^2 = f(\text{Bi})$  приведены в табл. 3.6.

Решение (3.22) для центра шара представлено в виде номограммы  $\Theta'''_{x=0} = f(\text{Fo}, \text{Bi})$  на рис. 3.7. Решение (3.23) для поверхности шара представлено в виде номограммы  $\Theta'''_{x=1} = f(\text{Fo}, \text{Bi})$  на рис. 3.8.

Таблица 3.5

Корни характеристического уравнения (3.17) для шара

Bi	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\mu_5$	$\mu_6$
0,00	0,0000	4,4934	7,7253	10,9041	14,0662	17,2208
0,01	0,1730	4,4956	7,7265	10,9050	14,0669	17,2213
0,02	0,2445	4,4979	7,7278	10,9060	14,0676	17,2219
0,04	0,3450	4,5023	7,7304	10,9078	14,0690	17,2231
0,06	0,4217	4,5068	7,7330	10,9096	14,0705	17,2242
0,08	0,4860	4,5112	7,7356	10,9115	14,0719	17,2254
0,10	0,5423	4,5157	7,7382	10,9133	14,0733	17,2266
0,15	0,6609	4,5268	7,7447	10,9179	14,0769	17,2295
0,2	0,7593	4,5379	7,7511	10,9225	14,0804	17,2324
0,3	0,9208	4,5601	7,7641	10,9316	14,0875	17,2382
0,4	1,0528	4,5822	7,7770	10,9408	14,0946	17,2440
0,5	1,1656	4,6042	7,7899	10,9499	14,1017	17,2498
0,6	1,2644	4,6261	7,8028	10,9591	14,1088	17,2556
0,7	1,3525	4,6479	7,8156	10,9682	14,1159	17,2614
0,8	1,4320	4,6696	7,8284	10,9774	14,1230	17,2672
0,9	1,5044	4,6911	7,8412	10,9865	14,1301	17,2730
1,0	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788
1,5	1,8366	4,8158	7,9171	11,0409	14,1724	17,3076
2,0	2,0288	4,9132	7,9787	11,0856	14,2075	17,3364
2,5	2,1746	5,0037	8,0385	11,1296	14,2421	17,3649
3,0	2,2889	5,0870	8,0962	11,1727	14,2764	17,3932
4,0	2,4557	5,2329	8,2045	11,2560	14,3434	17,4490
5,0	2,5704	5,3540	8,3029	11,3349	14,4080	17,5034
6,0	2,6537	5,4544	8,3914	11,4086	14,4699	17,5562
7,0	2,7165	5,5378	8,4703	11,4773	14,5288	17,6072
8,0	2,7654	5,6078	8,5406	11,5408	14,5847	17,6567
9,0	2,8044	5,6669	8,6031	11,5994	14,6374	17,7032

Окончание табл. 3.5

Bi	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\mu_5$	$\mu_6$
10	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532	14,6870	17,7481
15	2,9349	5,8852	8,8605	11,8634	14,8917	17,9414
20	2,9857	5,9783	8,9831	12,0029	15,0384	18,0887
30	3,0372	6,0766	9,1201	12,1691	15,2245	18,2870
40	3,0632	6,1273	9,1933	12,2618	15,3334	18,4085
50	3,0788	6,1582	9,2384	12,3200	15,4034	18,4888
60	3,0893	6,1788	9,2690	12,3599	15,4518	18,5450
80	3,1023	6,2048	9,3075	12,4105	15,5141	18,6181
100	3,1102	6,2204	9,3308	12,4414	15,5521	18,6632
$\infty$	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496

Таблица 3.6

Коэффициенты уравнений (3.22), (3.23) для расчета температуры  
в характерных точках шара при  $Fo \geq 0,12$

Bi	$\mu_1$	$\mu_1^2$	$N_{ш}$	$P_{ш}$	Bi	$\mu_1$	$\mu_1^2$	$N_{ш}$	$P_{ш}$
0,00	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000	2,2	2,0917	4,3750	1,5125	0,6272
0,01	0,1730	0,0299	1,0030	0,9980	2,4	2,1483	4,6154	1,5433	0,6019
0,02	0,2445	0,0598	1,0060	0,9960	2,6	2,1997	4,8385	1,5718	0,5779
0,04	0,3450	0,1190	1,0120	0,9920	2,8	2,2463	5,0460	1,5982	0,5552
0,06	0,4217	0,1779	1,0179	0,9880	3,0	2,2889	5,2392	1,6227	0,5338
0,08	0,4860	0,2362	1,0239	0,9840	3,5	2,3806	5,6675	1,6761	0,4855
0,10	0,5423	0,2941	1,0298	0,9801	4,0	2,4556	6,0302	1,7202	0,4437
0,12	0,5929	0,3515	1,0357	0,9761	4,5	2,5180	6,3401	1,7567	0,4074
0,14	0,6391	0,4084	1,0416	0,9721	5,0	2,5704	6,6071	1,7870	0,3758
0,16	0,6819	0,4649	1,0475	0,9682	5,5	2,6152	6,8390	1,8124	0,3482
0,18	0,7218	0,5210	1,0533	0,9642	6,0	2,6537	7,0419	1,8338	0,3240
0,20	0,7593	0,5765	1,0592	0,9603	7,0	2,7165	7,3792	1,8673	0,2835
0,22	0,7948	0,6317	1,0650	0,9563	8,0	2,7654	7,6472	1,8920	0,2514
0,24	0,8285	0,6864	1,0708	0,9524	9,0	2,8044	7,8648	1,9106	0,2254
0,26	0,8606	0,7406	1,0765	0,9485	10	2,8363	8,0446	1,9249	0,2040
0,28	0,8913	0,7945	1,0823	0,9446	12	2,8851	8,3237	1,9450	0,1710
0,30	0,9208	0,8478	1,0880	0,9407	14	2,9206	8,5299	1,9581	0,1470
0,35	0,9897	0,9794	1,1023	0,9309	16	2,9476	8,6881	1,9670	0,1287
0,40	1,0528	1,1084	1,1164	0,9213	18	2,9687	8,8132	1,9734	0,1144



Окончание табл. 3.6

Bi	$\mu_1$	$\mu_1^2$	$N_{III}$	$P_{III}$		Bi	$\mu_1$	$\mu_1^2$	$N_{III}$	$P_{III}$
0,45	1,1112	1,2347	1,1303	0,9116		20	2,9857	8,9145	1,9781	0,1029
0,50	1,1656	1,3585	1,1441	0,9021		25	3,0166	9,0996	1,9856	0,0821
0,55	1,2165	1,4798	1,1578	0,8926		30	3,0372	9,2248	1,9898	0,0682
0,60	1,2644	1,5987	1,1713	0,8832		35	3,0521	9,3151	1,9924	0,0584
0,70	1,3525	1,8293	1,1978	0,8646		40	3,0632	9,3833	1,9942	0,0510
0,80	1,4320	2,0507	1,2236	0,8462		50	3,0788	9,4793	1,9962	0,0407
0,90	1,5044	2,2633	1,2488	0,8282		60	3,0893	9,5436	1,9974	0,0338
1,0	1,5708	2,4674	1,2732	0,8106		70	3,0967	9,5898	1,9980	0,0289
1,2	1,6887	2,8516	1,3201	0,7763		80	3,1023	9,6245	1,9985	0,0253
1,4	1,7906	3,2062	1,3640	0,7435		90	3,1067	9,6516	1,9988	0,0224
1,6	1,8798	3,5335	1,4052	0,7121		100	3,1102	9,6733	1,9990	0,0202
1,8	1,9586	3,8360	1,4436	0,6823		$\infty$	3,1416	9,8696	2,0000	0,0000
2,0	2,0288	4,1159	1,4793	0,6540						

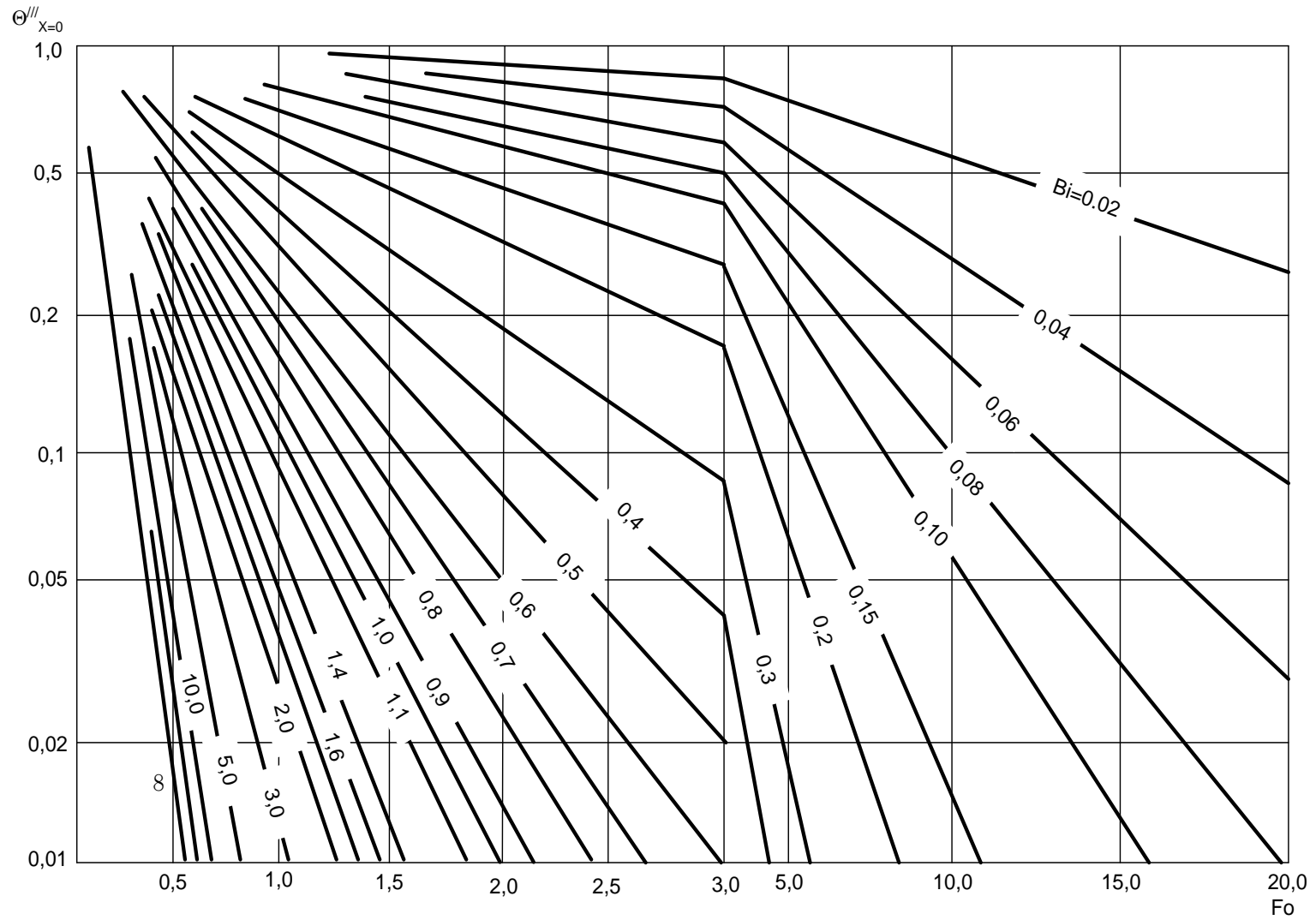


Рис. 3.7. Безразмерная температура в центре шара

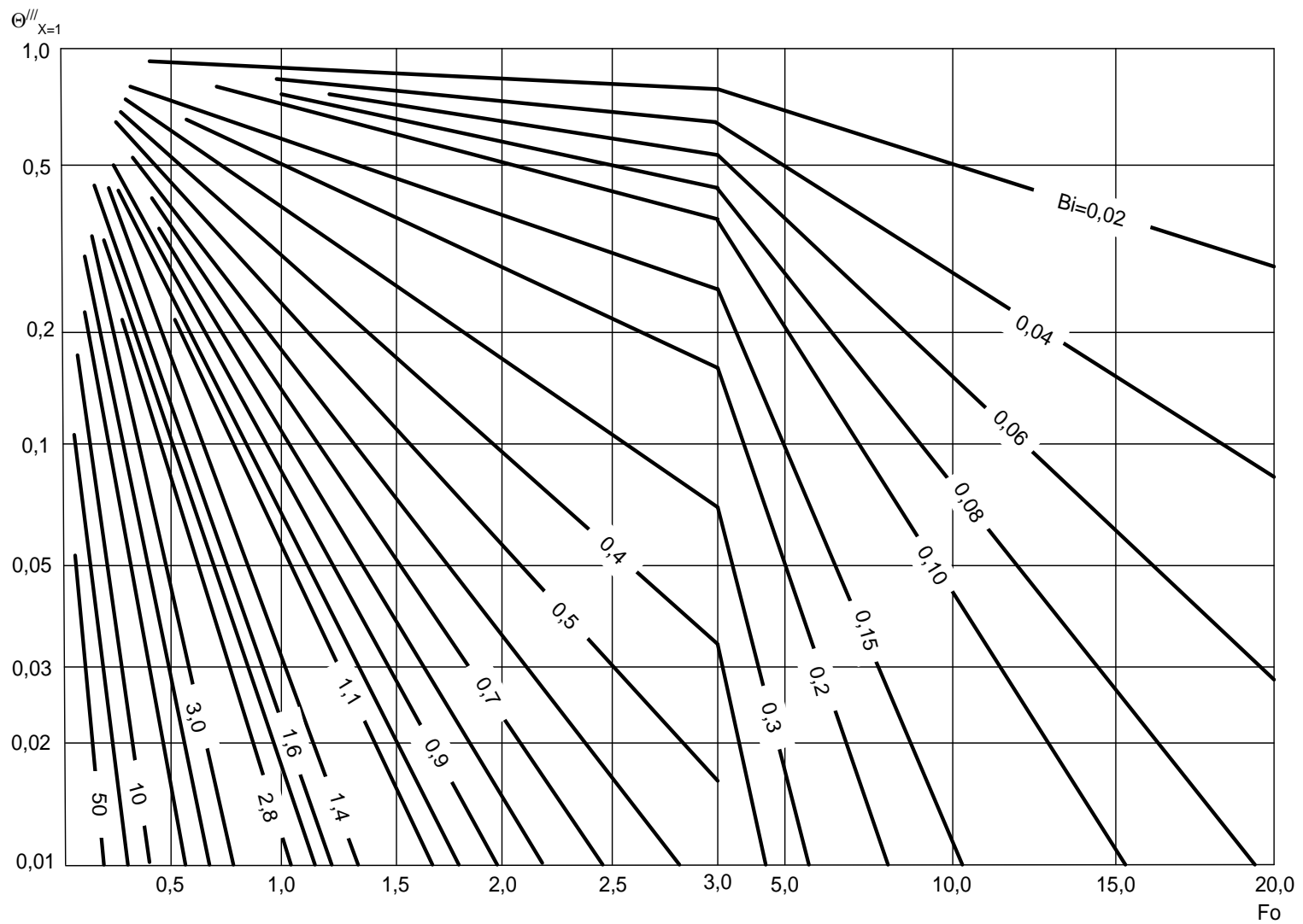


Рис. 3.8. Безразмерная температура на поверхности шара

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Лыков, А.В.** Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М.: Высшая шк., 1967. – 600 с.
2. **Михеев, М.А.** Основы теплопередачи / М.А. Михеев. – М.: Энергия, 1973. – 320 с.
3. **Бровкин Л.А.** Температурные поля тел при нагреве и плавлении в промышленных печах / Иван. энерг. ин-т им. В.И. Ленина – Иваново, 1973. – 364 с.
4. **Краснощеков, Е.А.** Задачник по теплопередаче / Е.А. Краснощеков, А.С. Сукомел. – М.: Энергия, 1980. – 288 с.
5. **Авчухов, В.В.** Задачник по процессам тепломассообмена / В.В. Авчухов, Б.Я. Паюсте. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 144 с.
6. **Цветков, Ф.Ф.** Задачник по тепломассообмену / Ф.Ф. Цветков, Р.В. Керимов, В.И. Величко.– М.: Изд-во МЭИ, 1997. – 136 с.
7. **Исаченко, В.П.** Теплопередача: Учебник для вузов / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел.– М.: Энергоиздат, 1981. – 416 с.
8. **Справочник** по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. М. Абрамовица, М. Стиган. – М.: Наука, 1979.