

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ  
«ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени В.И. ЛЕНИНА»

**В.В. Бухмиров**

## **ТЕПЛОМАССОБМЕН**

*Учебник*

В двух томах

**ТОМ I**

Иваново 2023

УДК 621.167.1

Б 94

**Бухмиров В.В.**

Б 94 Теплообмен: Учебник в 2-х т. Т. I / ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». – Иваново, 2023. – 364 с. : ил.

ISBN 978-00062-551-4

ISBN 978-00062-552-4 (Т. 1)

В учебнике рассмотрен физический смысл процессов переноса теплоты и массы в пространстве и во времени, освещены базовые понятия и законы теплообмена (ТМО). Из-за ограниченности объема курса математические доказательства ряда утверждений в учебник не включены.

Предназначен для студентов дневного и заочного отделений ИГЭУ, изучающих теплообмен по направлению «Теплотехника и теплоэнергетика», а также может быть полезен для всех студентов при самостоятельном изучении курса ТМО.

Первое издание в качестве учебного пособия вышло в свет в 2014 году.

Табл. 36. Ил. 48. Библиогр.: 44 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»

**Рецензенты:**

Профессор кафедры «Теоретические основы теплотехники» НИУ «МЭИ» (г. Москва), д.т.н., проф. Очков В.Ф.

Профессор Инженерной школы энергетики НИУ «Томский политехнический университет», д.ф.-м.н., проф. Кузнецов Г.В.

© В.В. Бухмиров, 2023

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $T$  – температура, °С (К);  
 $T_w$  – температура поверхности тела (стенки), °С (К);  
 $T_f$  – температура флюида (теплоносителя), °С (К);  
 $T_0$  – начальная температура тела, °С (К);  
 $T_n$  – температура насыщения, °С (К);  
 $T_r$  – температура газа, °С (К);  
 $T'$  и  $T''$  – температуры теплоносителей на входе и выходе из теплообменного аппарата, °С (К);  
 $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_2$  – средние температуры горячего и холодного теплоносителей, °С (К);  
 $\delta T_1 = T' - T''$  – изменение температуры горячего (охлаждаемого) теплоносителя в теплообменнике, °С (К);  
 $\delta T_2 = T'' - T'$  – изменение температуры холодного (нагреваемого) теплоносителя в теплообменнике, °С (К);  
 $\overline{\Delta T}$  – средняя разность температур между горячим и холодным теплоносителями (средний температурный напор) в теплообменнике, °С (К);  
 $Q_r$  – количество теплоты (теплота, тепловая энергия), Дж;  
 $Q$  – тепловой поток, Вт;  
 $q$  – поверхностная плотность теплового потока, Вт/м<sup>2</sup>;  
 $q_l$  – линейная плотность теплового потока, Вт/м;  
 $q_v$  – объемная плотность внутренних источников (стоков) теплоты, Вт/м<sup>3</sup>;  
 $M_i$  – масса  $i$ -го компонента смеси, кг;  
 $C_i$  – относительная массовая концентрация  $i$ -го компонента смеси, кг/кг;  
 $\rho_i$  – объемная концентрация (парциальная плотность)  $i$ -го компонента смеси, кг/м<sup>3</sup>;  
 $m_i$  – поток массы  $i$ -го компонента смеси, кг/с;  
 $j_i$  – плотность потока массы  $i$ -го компонента смеси, кг/(с·м<sup>2</sup>);  
 $\tau$  – время, с;

- $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); длина волны, м (мкм);
- $D_i$  – коэффициент диффузии  $i$ -го компонента смеси, м<sup>2</sup>/с;
- $k$  – коэффициент теплопередачи, Вт/(м<sup>2</sup>·К);
- $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м<sup>2</sup>·К);
- $\beta$  – коэффициент массоотдачи, м/с;  
 коэффициент, учитывающий отклонение излучения водяного пара от закона Бэра;  
 коэффициент объемного расширения, 1/К;
- $R$  – определяющий размер в задачах кондуктивного теплообмена (теплопроводности), м;
- $R_0$  – определяющий размер в задачах конвективного теплообмена, м;
- $G$  – массовый расход флюида (теплоносителя), кг/с;
- $w$  – средняя скорость движения флюида (теплоносителя), м/с;
- $f$  – площадь поперечного сечения канала для прохода флюида (теплоносителя), м<sup>2</sup>;
- $F$  – площадь поверхности теплообмена, м<sup>2</sup>;
- $V$  – объем, м<sup>3</sup>;
- $g = 9,8 \text{ м}^2/\text{с}$  – ускорение свободного падения;
- $H$  – высота вертикальной или длина наклонной поверхности, м;
- $\ell$  – длина протяженного тела, м;
- $p_n$  – давление насыщения, Па;
- $r$  – удельная теплота фазового перехода, Дж/кг;
- $du$  ( $du'$ ) – изменение удельной внутренней энергии флюида (теплоносителя) в элементарном объеме, Дж/кг (Дж/м<sup>3</sup>);
- $dh$  ( $dh'$ ) – изменение удельной энтальпии флюида (теплоносителя) в элементарном объеме, Дж/кг (Дж/м<sup>3</sup>);
- $c_p$  – удельная массовая изобарная теплоёмкость, Дж/(кг·К);
- $c_p'$  – удельная объемная изобарная теплоёмкость, Дж/(м<sup>3</sup>·К);
- $c_v$  – удельная массовая изохорная теплоёмкость, Дж/(кг·К);
- $c_v'$  – удельная объемная изохорная теплоёмкость, Дж/(м<sup>3</sup>·К);

$\alpha$  – коэффициент температуропроводности,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  
 $\rho$  – плотность,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  
 $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  
 $\mu$  – динамический коэффициент вязкости,  $\text{Па}\cdot\text{с}$ ;  
 $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $\text{Н}/\text{м}$ ;  
 $\sigma_0$  – коэффициент излучения АЧТ,  $\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К}^4)$ ;  
 $Q_{\text{пад}}$  и  $E_{\text{пад}}$  – поток и плотность потока излучения, падающие на поверхность тела,  $\text{Вт}$  и  $\text{Вт}/\text{м}^2$ ;  
 $Q_{\text{отр}}$  и  $E_{\text{отр}}$  – поток и плотность потока излучения, отраженные от поверхности тела,  $\text{Вт}$  и  $\text{Вт}/\text{м}^2$ ;  
 $Q_{\text{погл}}$  и  $E_{\text{погл}}$  – поток и плотность потока излучения, поглощенные телом,  $\text{Вт}$  и  $\text{Вт}/\text{м}^2$ ;  
 $Q_{\text{проп}}$  и  $E_{\text{проп}}$  – поток и плотность потока излучения, пропускаемые телом,  $\text{Вт}$  и  $\text{Вт}/\text{м}^2$ ;  
 $Q_{\text{соб}}$  ( $Q$ ) – поток собственного излучения тела,  $\text{Вт}$ ;  
 $E_{\text{соб}}$  ( $E$ ) – плотность потока собственного излучения тела (лучеиспускательная способность тела; интегральная интенсивность излучения тела),  $\text{Вт}/\text{м}^2$ ;  
 $Q_{\text{эф}}$  и  $E_{\text{эф}}$  – поток и плотность потока эффективного излучения тела,  $\text{Вт}$  и  $\text{Вт}/\text{м}^2$ ;  
 $Q_{\text{рез}}$  и  $E_{\text{рез}}$  ( $q_w$ ) – поток и плотность потока результирующего излучения тела,  $\text{Вт}$  и  $\text{Вт}/\text{м}^2$ ;  
 $E_{\lambda}$  – спектральная плотность потока собственного излучения (спектральная лучеиспускательная способность; спектральная интенсивность излучения тела),  $\text{Вт}/\text{м}^3$ ;  
 $A$  – поглощательная способность тела;  
 $R$  – отражательная способность тела;  
 $D$  – пропускательная способность тела;  
 $\varepsilon_{\lambda}$  и  $\varepsilon$  – спектральная и интегральная степени черноты тела;  
 $x$  – степень сухости пара;  
 $x, y, z$  – декартовы координаты;  
 $r, \varphi, z$  – цилиндрические координаты;  
 $r, \varphi, \psi$  – сферические координаты.

## Критерии (числа) подобия

$$\text{Nu} = \frac{\alpha R_0}{\lambda} - \text{критерий Нуссельта};$$

$$\text{St} = \frac{\alpha}{c_p \rho w} = \frac{\alpha}{c'_p w} - \text{критерий Стантона};$$

$$\text{Re} = \frac{w R_0}{\nu} - \text{критерий Рейнольдса};$$

$$\text{Fr} = \frac{g R_0}{w^2} - \text{критерий Фруда};$$

$$\text{Ga} = \frac{g R_0^3}{\nu^2} - \text{критерий Галилея};$$

$$\text{Ar} = \text{Ga} \frac{\Delta \rho}{\rho} - \text{критерий Архимеда};$$

$$\text{Gr} = \frac{g R_0^3}{\nu^2} \beta \Delta T - \text{критерий Грасгофа};$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a} - \text{критерий Прандтля};$$

$$\text{Ra} = \text{Gr} \cdot \text{Pr} - \text{критерий Рэлея};$$

$$\Theta = \frac{T_f - T}{T_f - T_0} - \text{безразмерная температура};$$

$$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda_w} - \text{критерий Био};$$

$$Sk = \frac{\sigma_0 T^3 R}{\lambda_w} - \text{критерий Старка};$$

$$Sh = \frac{\beta R_0}{D_i} \left( Nu_D = \frac{\beta R_0}{D_i} \right) - \text{критерий Шервуда (диффузион-} \\ \text{ный критерий Нуссельта)};$$

$$Fo_D = \frac{D_i \cdot \tau}{R_0^2} - \text{диффузионный критерий Фурье};$$

$$Pe_D = \frac{w R_0}{D_i} - \text{диффузионный критерий Пекле};$$

$$Sc = \frac{\nu}{D_i} \left( Pr_D = \frac{\nu}{D_i} \right) - \text{критерий Шмидта (диффузионный} \\ \text{критерий Прандтля)};$$

$$Le' = \frac{Pr}{Sc} = \frac{D_i}{a} - \text{критерий Льюиса-Семенова};$$

$$Le = \frac{Sc}{Pr} = \frac{a}{D_i} - \text{критерий Льюиса}.$$

## Индексы

**f** – текучая среда (капельная жидкость, газ, сыпучее тело);

**w** – поверхность (стенка);

**пад** – падающий;

**погл** – поглощенный;

**отр** – отраженный;

**проп** – пропущенный;

**соб** – собственный;

**эф** – эффективный;

**рез** – результирующий;

$\lambda$  – спектральный, величина в диапазоне  $d\lambda$  спектра;

$\theta$  – величина, характеризующая излучение абсолютно черного тела;

**г** – газ;

**ж** – жидкость;

**н** – параметры при температуре насыщения;

**см** – смесь;

**ос** – окружающая среда;

**пл** – параметры пленки конденсата;

**п** – параметры пара;

**1** – параметры горячего теплоносителя;

**2** – параметры холодного теплоносителя.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Первое издание учебника в виде учебного пособия для бакалавров «Тепломассообмен» вышло в 2014 году [33] и было востребовано студентами и специалистами-теплотехниками. Второе издание состоит из пяти частей с сохранением двухуровневой структуры изложения информации. На первом уровне (Часть 1) изложены основные понятия и определения тепломассообмена, приведена классификация решаемых задач, дана краткая характеристика математического описания процессов переноса теплоты и массы и рассмотрены экспериментальные и теоретические методы их решения. Подробно рассмотрен процесс теплопередачи через непроницаемые стенки. Поэтому первую часть учебника можно считать студенческим минимумом знания предмета.

Во второй части учебника изложены методы расчета и моделирования *внутреннего* теплообмена в твердом теле за счет теплопроводности при отсутствии и наличии внутренних источников теплоты.

В третьей части приведены методы расчета и моделирования *внешнего* теплообмена в среде, окружающей твердое тело. К задачам внешнего теплообмена относят задачи конвективного и радиационного теплообмена.

В четвертой части описана конструкция теплообменных аппаратов рекуперативного, регенеративного и смешительного типа и приведены инженерные методы расчета рекуператоров.

Пятая часть содержит дополнительную информацию о расчетах массообмена в твердых и текучих средах, основы которых приведены в первой части учебника, и методы аналогии решения задач тепломассообмена.

В первый том включены первая и вторая части учебника, а во второй том – третья, четвертая и пятая части учебника.

Настоящее издание учебника включает в себя все материалы из первого издания учебного пособия, которое исправлено и расширено за счет более подробного изложения базовых понятий тепломассообмена.

Информация, дополняющая основной базовый материал курса, дана в виде «Замечаний» по тексту пособия. При начальном изучении предмета эту информацию можно опустить.

Учебник и учебное пособие для бакалавров [33] написаны на базе курса лекций по тепломассообмену, читаемого на кафедре «Теоретические основы теплотехники» Ивановского государственного энергетического университета. При работе над пособием были использованы материалы классических учебников по тепломассообмену и теплопередаче [1–9, 11–13], а также собственные труды автора [10, 20, 21, 38].

Автор благодарен своим учителям В.А. Кривандину, В.А. Арутюнову, Л.А. Бровкину и В.М. Шипилову за их научный и методический дар и признателен коллегам и своим ученикам за помощь в издании учебника.

*Автор*

## ВВЕДЕНИЕ

В окружающей нас среде, включая природу, технические устройства и системы жизнеобеспечения (быт людей), непрерывно происходит обмен энергией в механической, тепловой, электрической, электромагнитной, химической и других формах ее существования. При этом абсолютное значение энергии в любой замкнутой системе измерить нельзя, а это и не требуется! Для решения задач, так или иначе связанных с преобразованием энергии, необходимо знать и уметь находить (расчетным или опытным путем) *изменение энергии* в заданной равновесной или неравновесной термодинамической системе (ТДС). В равновесных ТДС изменение внутренней энергии рассчитывают по закону сохранения энергии (первое начало термодинамики), а в неравновесных системах используют эмпирические законы переноса субстанции (теплоты, массы, импульса) и закон ее сохранения для элементарного бесконечно малого объема вещества.

Теоретическая и экспериментальная база расчета изменения энергии в заданной ТДС включает в себя три науки (дисциплины) – техническую термодинамику, теплообмен и механику жидкости и газа, которые для инженера-теплотехника являются основными в его профессиональной деятельности.

Тепловую форму энергии (теплоту) изучает *теплотехника* – наука (общетехническая дисциплина) о методах и способах получения, передачи и использования теплоты, а

также о технических устройствах, реализующих эти методы и способы.

В теплотехнике рассматривают два способа использования теплоты: *энергетический* и *технологический*.

При *энергетическом* использовании теплота служит для получения *механической работы*, которую применяют либо непосредственно для привода механизмов, либо преобразуют в *электрическую работу* (электрическую энергию) в электрогенераторе.

При *технологическом* или *непосредственном* использовании теплоты она служит для создания условий протекания технологических процессов в технических устройствах различного назначения, для изменения физических свойств тел путем их нагревания или охлаждения, для создания комфортных условий жизни и деятельности людей. К технологическому способу также относят использование теплоты в быту.

Процессы преобразования теплоты в механическую и электрическую работу изучает *техническая термодинамика* (ТТД). Классическая термодинамика изучает только равновесные системы, в которых изменение термодинамических параметров происходит бесконечно медленно, поэтому время, как параметр, не используют в термодинамических расчетах.

Процессы непосредственного использования теплоты изучает дисциплина *теплообмен*, которая позволяет рассчитать изменение теплоты в неравновесных термодинамических системах с переменным температурным полем в пространстве и времени.

Обмен веществом (массой) в системах с переменной концентрацией компонент вещества изучает наука *массообмен*. Законы переноса теплоты и массы аналогичны и поэтому их изучение объединяют в одну дисциплину *тепло-массообмен* (ТМО).

Расчеты теплообмена и массообмена при перемещении текучих сред (флюидов) требуют задания полей скорости и давления в заданной расчетной области, информация о методах расчета которых изложена в дисциплине *механика жидкости и газа* (МЖГ).

Заметим, что процесс молекулярного переноса импульса аналогичен процессам молекулярного переноса теплоты и массы, что составляет суть тройной аналогии данных процессов.

При изучении любой технической дисциплины в основном используют два метода исследования: *феноменологический* и *статистический*.

Следуя *феноменологическому* методу, среду, в которой происходят физические процессы, представляют, как непрерывное вещество без учета его внутреннего строения. При этом для описания всех физических процессов используют *макрофизические* величины, которые, как правило, можно измерить (температура, давление, скорость, тепловой поток) или вычислить (внутренняя энергия, энтальпия). Физические свойства вещества характеризуют коэффициентами, которые находят опытным путем и приводят в справочных таблицах в зависимости от температуры.

*Статистический метод исследования* рассматривает внутреннее строение вещества и использует понятия

*микрoфизической* природы (масса молекулы, число молекул и т.д.). Эта теория использует методы математической статистики и методы теории вероятности.

При изучении процессов тепломассообмена в теплотехнике в основном используют феноменологический метод исследования.

### ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕПЛОМАССООБМЕНА. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

*Тепломассообмен (ТМО)* – наука о *самопроизвольных необратимых* процессах распространения теплоты в переменном поле температур и о *самопроизвольных необратимых* процессах распространения массы и переменном поле концентраций. В движущихся средах процессы ТМО зависят от скорости перемещения текущей среды.

Согласно второму закону термодинамики самопроизвольный процесс распространения теплоты происходит в сторону уменьшения температуры. Аналогично поток массы в переменном поле концентраций направлен в сторону убывания концентрации данного компонента смеси.

В отличие от методов термодинамического анализа в равновесных термодинамических системах (ТДС), тепломассообмен рассматривает процессы переноса теплоты и массы в пространстве и во времени. Поэтому в результате решения задачи тепломассообмена находят распределения температур, концентраций компонентов смеси, а также потоков теплоты и массы как функции координат и времени в заданной расчетной области.

В базовом курсе ТМО подробно будем изучать процессы *теплообмена* в заданной системе тел для расчета *температурного поля* и распределения *тепловых потоков*. Расчет *массообмена* рассмотрим кратко, используя свойство аналогии процессов переноса теплоты и массы. В результате расчета массообмена находят *поля концентрации* компонент смеси и *потоки массы* этих компонент в заданной расчетной области.

Передача теплоты (теплопередача) рассмотрена через непроницаемые для вещества стенки классической формы.

## ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕПЛООБМЕНА

### § 1.1. Температурное поле. Изотермическая поверхность

*Температурное поле* есть совокупность значений температуры во всех точках данной расчетной области и во времени.

Температурное поле будем обозначать  $T(x_i, \tau)$ , где  $x_i$  – координаты, м;  $\tau$  – время, с.

Температуру измеряют в градусах Цельсия и в Кельвинах

$$T, \text{К} = T, \text{°C} + 273,15; \quad T, \text{°C} = T, \text{К} - 273,15. \quad (1.1)$$

Изменение температуры (перепад температур) не зависит от системы единиц измерения температуры, поэтому

$$\Delta T, \text{К} = \Delta T, \text{°C}, \text{ так как } 1 \text{ К} = 1 \text{ °C}.$$

Температурное поле характеризуют количеством координат и его поведением во времени.

В расчетах теплообмена используют ортогональную систему координат  $x_i = x_1, x_2, x_3$ , которая для декартовой, цилиндрической и сферической систем координат принимает вид:

$x_i = x, y, z$  – декартовая система координат (рис. 1.1);

$x_i = r, \varphi, z$  – цилиндрическая система координат (рис. 1.2);

$x_i = r, \varphi, \psi$  – сферическая система координат (рис. 1.3).

В зависимости от числа координат, в направлении которых изменяется температура, различают *трехмерное, двумерное, одномерное* и *нульмерное (однородное)*

температурные поля. Нульмерное температурное поле показывает, что температура во всех точках тела одинакова (перепад температуры по сечению тела равен нулю) и может изменяться только во времени. Нульмерное температурное поле существует в *термически тонких телах*, которые нагреваются или охлаждаются с одинаковой температурой во всех точках тела.

Температурное поле, которое *изменяется во времени*, называют *нестационарным* температурным полем. И, наоборот, температурное поле, которое *не изменяется во времени*, называют *стационарным* температурным полем.

Примеры записи температурных полей:

$T(x_1, x_2, x_3, \tau)$  – трехмерное нестационарное температурное поле;

$T(x_1, x_2, \tau)$  – двумерное нестационарное температурное поле ( $\partial T / \partial x_3 = 0$ );

$T(x_1, x_2)$  – двумерное стационарное температурное поле ( $\partial T / \partial x_3 = 0$ ,  $\partial T / \partial \tau = 0$ );

$T(x_1, \tau)$  – одномерное нестационарное температурное поле ( $\partial T / \partial x_2 = 0$ ,  $\partial T / \partial x_3 = 0$ );

$T(x_1)$  – одномерное стационарное температурное поле ( $\partial T / \partial x_2 = 0$ ,  $\partial T / \partial x_3 = 0$ ,  $\partial T / \partial \tau = 0$ );

$T(\tau)$  – нульмерное нестационарное температурное поле ( $\partial T / \partial x_1 = 0$ ,  $\partial T / \partial x_2 = 0$ ,  $\partial T / \partial x_3 = 0$ );

$T \neq f(x_i, \tau) = \text{const}$  – нульмерное стационарное температурное поле ( $\partial T / \partial x_1 = 0$ ,  $\partial T / \partial x_2 = 0$ ,  $\partial T / \partial x_3 = 0$ ,  $\partial T / \partial \tau = 0$ ).

Нульмерное стационарное температурное поле представляет собой термодинамическую (равновесную) температуру, которая характеризует тепловое равновесие тела с

окружающей средой. Термодинамическая температура в Кельвинах является интенсивным параметром в *равновесной* термодинамической системе.

Важную роль при математическом описании теплообмена играет понятие *изотермической поверхности*, на которой температура одинакова во всех ее точках. Или иными словами *изотермическая поверхность* – это поверхность равных температур.

Свойства изотермических поверхностей:

- а) изотермические поверхности не пересекаются;
- б) в нестационарных процессах изотермические поверхности перемещаются в пространстве.

В базовом курсе ТМО будем рассматривать расчет одномерного нестационарного  $T(x_1, \tau)$  и одномерного стационарного  $T(x_1)$  температурных полей и тепловых потоков в телах, так называемой, простой (классической, канонической) формы. Три тела можно считать телами простой формы, если выполняются условия:

– бесконечная (неограниченная) пластина – это пластина, у которой толщина много меньше (в несколько раз) длины и ширины пластины ( $\delta \ll l_y, l_z$ ) и интенсивность теплообмена одинакова во всех точках на обеих поверхностях пластины, поэтому перенос теплоты происходит только поперек пластины (вдоль оси  $Ox$ ) (рис. 1.1);

– бесконечный (неограниченный) цилиндр – это цилиндр, у которого диаметр много меньше (в несколько раз) длины цилиндра ( $D \ll l_z$ ) и интенсивность теплообмена одинакова во всех точках на боковой поверхности цилиндра, поэтому перенос теплоты происходит только вдоль радиуса цилиндра (вдоль оси  $Or$ ) (рис. 1.2);

– шар (сфера) можно считать телом простой формы, если интенсивность теплообмена одинакова на всей поверхности шара (на обеих поверхностях сферы), поэтому

перенос теплоты происходит только вдоль радиуса шара (сферы) (рис. 1.3).

При одинаковых условиях теплообмена на обеих поверхностях бесконечной пластины изотермические поверхности представляют собой плоскости, параллельные плоскостям, образующим данную пластину (рис. 1.1). Например, на всей центральной плоскости ABCD в данный момент времени существует температура  $T_0$ , а на внешних поверхностях пластины – температура  $T_w$ . Аналогично можно построить изотермические поверхности в виде плоскостей, параллельных образующим плоскостям пластины, для любой температуры в области ее изменения. На рис. 1.1 изображены изотермические поверхности для температуры  $T_1$ .

При одинаковых условиях теплообмена на всей поверхности бесконечного цилиндра изотермические поверхности представляют собой соосные (коаксиальные) цилиндрические поверхности (вложенные друг в друга цилиндры) (рис. 1.2). Например, на всей внешней поверхности цилиндра существует температура  $T_w$ , а на цилиндрической поверхности радиусом  $r_1$  – температура  $T_1$ . Аналогично можно построить изотермические поверхности для любой температуры в области ее изменения.

При одинаковых условиях теплообмена на всей поверхности шара изотермические поверхности представляют собой вложенные друг в друга сферы (рис. 1.3). Например, на внешней поверхности шара существует температура  $T_w$ , а на сферической поверхности радиусом  $r_1$  – температура  $T_1$ .

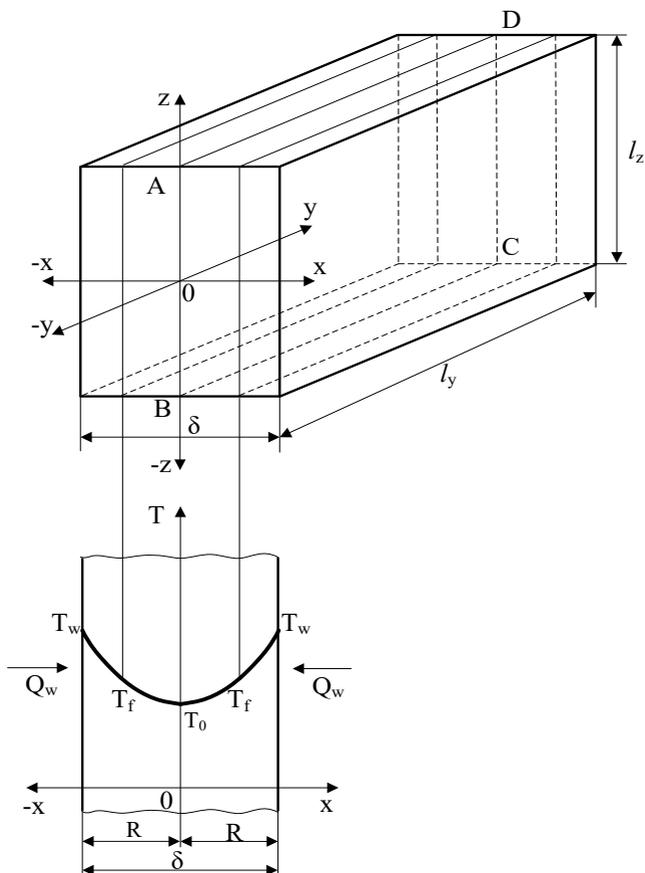


Рис. 1.1. Изотермические поверхности в бесконечной пластине:

$$\delta \ll l_x; \delta \ll l_z;$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{0 < x \leq R} \neq 0; \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

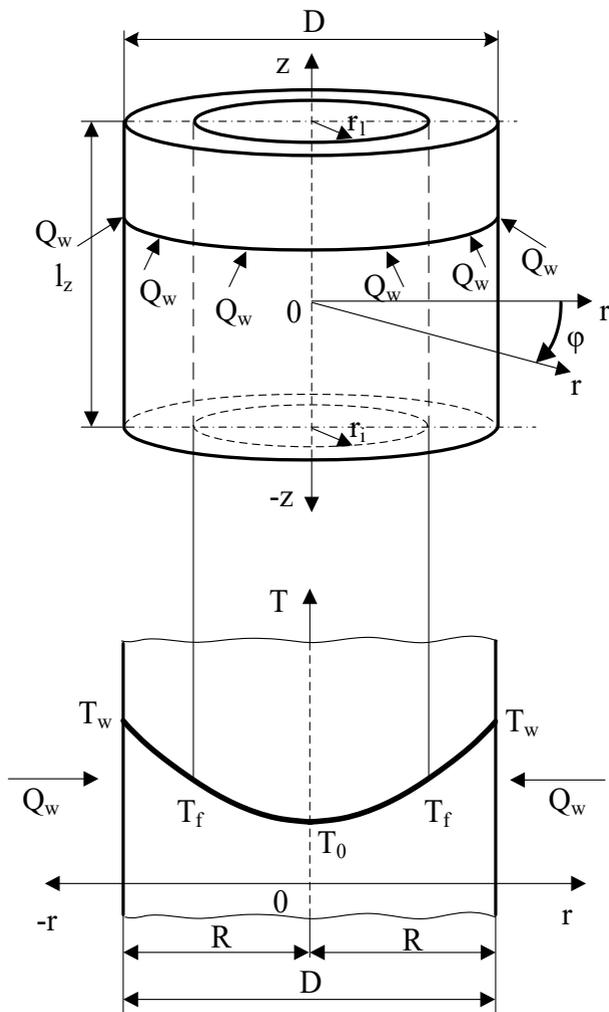


Рис. 1.2. Изотермические поверхности в бесконечном цилиндре:

$$D \ll l_z;$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{0 < r \leq R} \neq 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

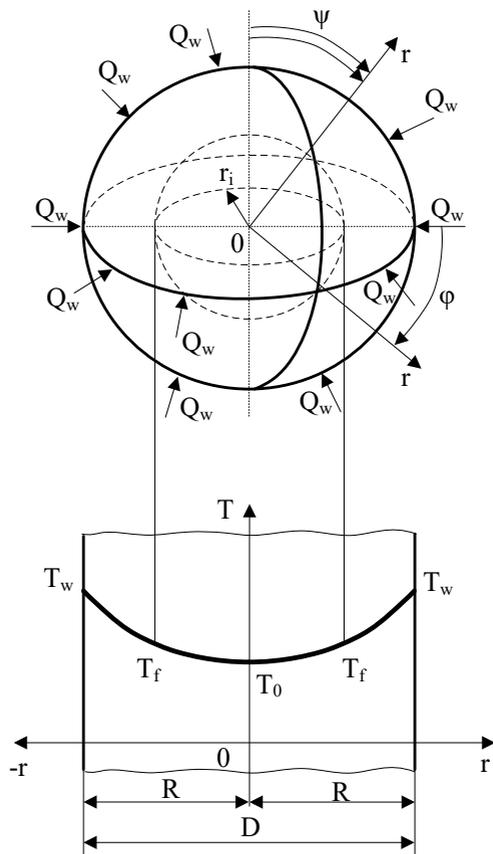


Рис. 1.3. Изотермические поверхности в шаре:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{0 < r \leq R} \neq 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0.$$

## § 1.2. Градиент температурного поля

*Градиент температурного поля, или градиент температуры*, – вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в сторону увеличения температуры, численно равный изменению температуры на единице длины:

$$\text{grad}(T) = \frac{\partial T}{\partial n} \vec{n}_0, \quad (1.2)$$

где  $n$  – нормаль к изотермической поверхности,  $m$ ;  $\vec{n}_0$  – единичный вектор нормали.

Градиент температуры обозначают также символом  $\nabla(T)$ . В этом случае формулу (1.2) записывают в виде

$$\nabla(T) = \frac{\partial T}{\partial n} \vec{n}_0, \quad (1.3)$$

где  $\nabla$  – оператор Гамильтона («набла») – векторный дифференциальный оператор, компоненты которого являются частными производными по координатам (символический вектор, заменяющий слово градиент (grad)).

Градиент температурного поля измеряют в градусах на метр:  $^{\circ}\text{C}/\text{м} = \text{K}/\text{м} = \text{град}/\text{м}$ .

В декартовой системе координат градиент температурного поля записывают в виде:

$$\text{grad}(T) = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}, \quad (1.4)$$

где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – единичные векторы или орты в декартовой системе координат.

В цилиндрической системе координат формула для расчета градиента температурного поля имеет вид:

$$\text{grad}(T) = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z, \quad (1.5)$$

где  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\varphi$ ,  $\vec{e}_z$  – единичные векторы в цилиндрической системе координат.

В сферической системе координат градиент температурного поля рассчитывают по формуле:

$$\text{grad}(T) = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r \cdot \sin \psi} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \psi} \vec{e}_\psi, \quad (1.6)$$

где  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\varphi$ ,  $\vec{e}_\psi$  – единичные векторы в сферической системе координат.

Градиент одномерного температурного поля в телах простой формы рассчитывают по формулам:

– бесконечная пластина  $\text{grad}(T) = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i}; \quad (1.7, a)$

– бесконечный цилиндр и шар  $\text{grad}(T) = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r. \quad (1.7, б)$

### **§ 1.3. Количество теплоты. Тепловой поток. Удельные тепловые потоки**

*Количество теплоты* – это количество тепловой энергии, полученное или отданное телом (твердым, жидким или газообразным) или проходящее через это тело в течение заданного времени  $\tau$  в результате теплообмена.

Обозначают количество теплоты  $Q_\tau$  и измеряют в системе СИ в джоулях (Дж) или в технической системе единиц в калориях (кал):

В инженерных расчетах используют приближенные соотношения единиц измерения теплоты в системе СИ и в технической системе единиц измерения:

$$1 \text{ кал} \approx 4,187 \text{ Дж}; \quad 1 \text{ Дж} \approx 0,24 \text{ кал}. \quad (1.8)$$

При этом в расчетах теплообмена используют кратные Джоулю и калории единицы измерения:

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ кДж} = 10^3 \text{ Дж}; & 1 \text{ ккал} = 10^3 \text{ кал}; \\ 1 \text{ МДж} = 10^6 \text{ Дж}; & 1 \text{ Мкал} = 10^6 \text{ кал}; \\ 1 \text{ ГДж} = 10^9 \text{ Дж}; & 1 \text{ Гкал} = 10^9 \text{ кал}; \\ 1 \text{ ТДж} = 10^{12} \text{ Дж}; & 1 \text{ Ткал} = 10^{12} \text{ кал}; \\ 1 \text{ ПДж} = 10^{15} \text{ Дж}; & 1 \text{ Пкал} = 10^{15} \text{ кал}. \end{array}$$

Для учета тепловой энергии в энергетике наиболее часто используют гигаджоуль (ГДж) и гигакалорию (Гкал). Расчет больших энергий выполняют в тераджоулях (ТДж) и теракалориях (Ткал) или в петаджоулях (ПДж) и петакалориях (Пкал).

**Замечание.** В процессе теплообмена изменяется тепловая внутренняя энергия тела, которая характеризуется температурой, строго говоря, только в *равновесных* термодинамических системах. Поэтому количество теплоты  $Q_\tau$  равно изменению тепловой внутренней энергии тела в *изохорных* процессах или изменению энтальпии в *изобарных* процессах. По аналогии с обозначением количества теплоты  $Q_\tau$ , изменение внутренней энергии в изохорных процессах и изменение энтальпии в изобарных процессах в *неравновесных* системах за время теплообмена  $\tau$  назовем  $U_\tau$  и  $H_\tau$  соответственно. Для бесконечно малого объема  $dV$  изменение внутренней энергии и энтальпии равно  $d^2U_\tau = \rho c_v dT dV$  и  $d^2H_\tau = \rho c_p dT dV$ , где  $\rho$  – плотность,  $c_v$  – удельная массовая изохорная теплоемкость;  $c_p$  – удельная массовая изобарная теплоемкость;  $dT$  – изменение температуры элементарного объема за бесконечно малое время  $dt$ . При этом для твердых тел и капельных жидкостей, незначительно изменяющих свой объем при нагреве и охлаждении  $c_v \approx c_p$ , и, как следствие, справедливо утверждение  $\Delta U_\tau \approx \Delta H_\tau$ , где символ  $\Delta$  означает изменение.

Для сравнения количества энергии разной физической природы (тепловой, электрической, механической, энергии, выделяющейся от сжигания разного вида органического топлива) удобно использовать единую систему измерения физических величин – систему СИ. Однако в промышленности и в энергетике совместно с гигаджоулем (ГДж) для расчетов используют гигакалорию (Гкал), тонну условного топлива (т у.т.), тонну нефтяного эквивалента (т н.э.) и мегаватт-часы (МВт·ч).

Для перевода одних единиц энергии в другие единицы достаточно знать экспериментально полученное соотношение между калорией и Джоулем ( $1 \text{ кал} \approx 4,187 \text{ Дж}$ ) и принятую в расчетах теплотворную способность условного топлива, равную  $7000 \text{ ккал/(кг у.т.)}$  или  $7,0 \text{ Гкал/(т у.т.)}$ .

Нефтяной эквивалент ( $\text{toe} = \text{Tonne of oil equivalent}$ ) связан с единицами измерения энергии международной системы единиц (СИ) соотношением  $1 \text{ т н.э.} = 41,868 \text{ ГДж}$ , а с единицами измерения энергии технической системы единиц равенством  $1 \text{ т н.э.} = 10 \text{ Гкал}$ .

Для перевода основных единиц энергии можно воспользоваться диаграммой перевода (рис. 1.4) или следующим соотношением:

$$1 \text{ т у.т.} = 7,0 \text{ Гкал} = 29,3 \text{ ГДж} = 0,7 \text{ т н.э.} = 8,14 \text{ МВт} \cdot \text{ч}. \quad (1.9)$$

Например, чтобы найти соотношение  $1 \text{ ГДж}$  и  $1 \text{ МВт} \cdot \text{ч}$ , необходимо из (1.9) выписать равенство

$$29,3 \text{ ГДж} = 8,14 \text{ МВт} \cdot \text{ч},$$

из которого следует, что

$$1 \text{ ГДж} = 8,14 / 29,3 \text{ МВт} \cdot \text{ч} = 0,278 \text{ МВт} \cdot \text{ч}$$

или

$$1 \text{ МВт} \cdot \text{ч} = 29,3 / 8,14 \text{ ГДж} = 3,6 \text{ ГДж}.$$

**Замечание.** Величину «тонна условного топлива» также называют «угольным эквивалентом». В английской транскрипции тонну нетяного эквивалента (т н.э.) обозначают «тое».

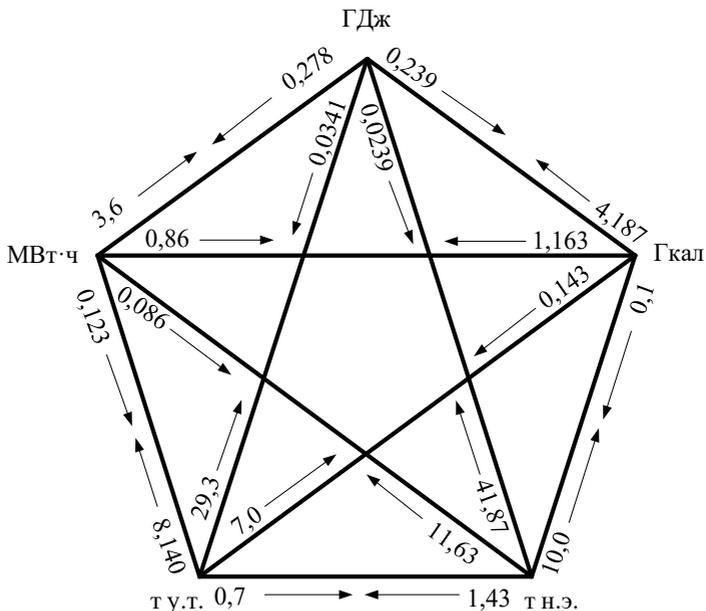


Рис. 1.4. Диаграмма перевода единиц измерения энергии

*Тепловой поток* равен количеству теплоты, проходящему через заданную и нормальную к направлению распространения теплоты поверхность *в единицу времени*:

$$\vec{Q} = \frac{dQ_{\tau}}{dt} \vec{n}_0. \quad (1.10)$$

Тепловой поток характеризует интенсивность теплообмена во времени или мощность теплообмена и поэтому его измеряют в Джоулях в секунду или Ваттах ( $\text{Дж/с} = \text{Вт}$ ).

При стационарном режиме теплообмена и при одинаковых условиях теплообмена на поверхности тела тепловой

поток не изменяется во времени и его рассчитывают по формуле:

$$Q = \frac{Q_{\tau}}{\tau}. \quad (1.11)$$

В технической системе единиц тепловой поток измеряют в килокалориях в час (ккал/час). При этом соотношение единиц измерения теплового потока в технической и международной системе единиц составляет:

$$1 \frac{\text{ккал}}{\text{час}} = \frac{4187 \text{ Дж}}{3600 \text{ с}} = 1,163 \text{ Вт};$$

$$1 \text{ Вт} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \frac{0,00024 \text{ ккал}}{1/3600 \text{ час}} = 0,86 \frac{\text{ккал}}{\text{час}}.$$

Для анализа интенсивности теплообмена (тепловой напряженности поверхности) используют удельные тепловые потоки – тепловые потоки, отнесенные к площади поверхности или к длине протяженного тела с постоянным поперечным сечением, которые характеризуют мощность теплообмена на одном квадратном или одном погонном метре поверхности.

*Поверхностная плотность теплового потока* ( $q$ , Вт/м<sup>2</sup>) – тепловой поток, отнесенный к площади поверхности тела.

*Линейная плотность теплового потока* ( $q_{\ell}$ , Вт/м) – тепловой поток, отнесенный к длине протяженного тела с произвольным, но постоянным по длине поперечным сечением.

*Поверхностная плотность теплового потока* равна количеству теплоты, проходящей через заданную и нормальную к направлению распространения теплоты *единичную* площадку в *единицу времени* или тепловому потоку, проходящему через заданную *единичную* площадку:

$$\bar{q} = \frac{d^2 Q_\tau}{dt \cdot dF} \bar{n}_0 = \frac{d\bar{Q}}{dF}, \quad (1.12)$$

где  $\bar{n}_0$  – единичный вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности;  $\tau$  – время, с;  $F$  – площадь поверхности теплообмена, м<sup>2</sup>.

В стационарном режиме и при одинаковых условиях теплообмена на всей поверхности тела:

$$q = \frac{Q_\tau}{\tau \cdot F} = \frac{Q}{F}. \quad (1.13)$$

Зная поверхностную плотность теплового потока  $q$ , можно рассчитать тепловой поток  $Q$  и количество теплоты за время теплообмена  $\tau$ :

$$Q = q \cdot F \quad \text{и} \quad Q_\tau = q \cdot F \cdot \tau = Q \cdot \tau. \quad (1.14)$$

**Замечание.** Обратим внимание, что в нестационарных процессах теплообмена значения теплового потока и поверхностной плотности теплового потока, рассчитанные по формулам (1.10) и (1.12), справедливы для бесконечно малого интервала времени  $dt$  и бесконечно малого участка поверхности  $dF$  и изменяются во времени и пространстве. В инженерных расчетах, как правило, *поверхностную плотность теплового потока  $q$  называют кратко плотностью теплового потока или удельным тепловым потоком.*

*Линейная плотность теплового потока* равна тепловому потоку, проходящему через боковую поверхность *единичной* длины протяженного тела с произвольным, но постоянным по длине тела поперечным сечением. В стационарном режиме и при одинаковых условиях теплообмена на всей поверхности тела:

$$q_\ell = \frac{Q_\tau}{\tau \cdot \ell} = \frac{Q}{\ell}, \quad (1.15)$$

где  $\tau$  – время, с;  $\ell$  – длина протяженного тела, м.

Зная линейную плотность теплового потока  $q_\ell$ , можно рассчитать тепловой поток и количество теплоты за время теплообмена  $\tau$ :

$$Q = q_\ell \cdot \ell \quad \text{и} \quad Q_\tau = q_\ell \cdot \ell \cdot \tau = Q \cdot \ell. \quad (1.16)$$

Удельные тепловые потоки  $q$  и  $q_\ell$  связаны между собой следующим соотношением:

$$q_\ell = q \cdot P, \quad (1.17)$$

которое следует из равенства

$$Q = q_\ell \cdot \ell = q \cdot P \cdot \ell,$$

где  $P$  – периметр протяженного тела, м.

Например, для трубы диаметром  $d$  периметр равен длине окружности ( $P = \pi d$ ) и формула (1.17) принимает вид:

$$q_\ell = q \cdot \pi d. \quad (1.18)$$

Переменное поле температур в заданной неравновесной термодинамической системе возникает, во-первых, вследствие обмена энергией через границы термодинамической системы с окружающей средой и, во-вторых, из-за действия источников или стоков теплоты, находящихся внутри термодинамической системы (внутренних источников) при их наличии. Внутренние источники (стоки) теплоты характеризуются объемной мощностью внутреннего тепловыделения (теплопоглощения)  $q_v$ , Вт/м<sup>3</sup>, равной количеству теплоты, которое выделяется или поглощается внутри *единичного объема* тела *в единицу времени*:

$$q_v = \frac{d^2 Q_\tau}{d\tau \cdot dV}. \quad (1.19, a)$$

Анализ формулы (1.19,а) показывает, что объемная мощность действия внутренних источников величина скалярная (не имеет направления) и может изменяться во времени и в пространстве, то есть  $q_v = f(x_i, \tau)$ .

В стационарном режиме теплообмена и при условии равномерного распределения внутренних источников (стоков) теплоты в объеме тела (твердого, жидкого или газообразного) можно записать:

$$q_v = \frac{Q_\tau}{\tau \cdot V} = \frac{Q}{V}, \quad (1.19,б)$$

где  $Q = Q_\tau / \tau$  – мощность тепловыделения (телопоглощения), Вт;  $\tau$  – время, с;  $V$  – объем тела, м<sup>3</sup>.

**Замечание.** Параметр теплообмена  $q_v$  – удельный показатель теплообмена и не является векторной величиной. Однако для единства терминологии в теплотехнике данный параметр  $q_v$ , Вт/м<sup>3</sup> иногда называют объемной плотностью теплового потока по аналогии с поверхностной плотностью теплового потока  $q$ , Вт/м<sup>2</sup> и линейной плотностью теплового потока  $q_l$ , Вт/м, которые являются векторами.

Для стационарного режима теплообмена при равномерном распределении источников теплоты по объему тела можно рассчитать мощность и количество теплоты за время действия  $\tau$  источника или стока теплоты:

$$Q = q_v \cdot V \quad \text{и} \quad Q_\tau = q_v \cdot V \cdot \tau = Q \cdot \tau. \quad (1.20)$$

Внутренние источники (стоки) теплоты могут быть различной геометрической формы (точечной, линейной, плоской и т.п.) и действовать в разных областях термодинамической системы (расчетной области), в которой протекают физические (ядерные, электромагнитные, механические), химические и биологические процессы с выделением или поглощением теплоты. При этом температурное поле, в свою очередь, влияет на коэффициенты переноса иной (не

тепловой) формы энергии и на свойства среды, в которой происходят физические процессы. Такого рода задачи требуют одновременного расчета температурного поля и поля другой не тепловой величины и называются *сопряженными* или *совместными* задачами (см. § 3.1). Параметр  $q_v$  в этом случае является связующим звеном при решении совместных (сопряженных) задач.

Методы расчета объемной мощности внутренних источников или стоков теплоты зависят от постановки конкретной задачи теплообмена и их рассматривают в специальной литературе в зависимости от формы энергии, влияющей на изменение тепловой внутренней энергии тела.

Величина  $q_v$  может быть как положительной (теплота выделяется), так и отрицательной (теплота поглощается).

#### **§ 1.4. Элементарные способы передачи теплоты. Сложный теплообмен**

В природе существуют три элементарных способа передачи теплоты: *теплопроводность (кондукция)*, *конвекция* и *тепловое излучение (радиационный теплообмен)*.

*Теплопроводность (кондукция)* – способ передачи теплоты за счет взаимодействия микрочастиц тела (атомов, молекул, ионов в электролитах и электронов в металлах) в переменном поле температур.

Теплопроводность происходит в твердых, жидких и газообразных телах. В твердых телах теплопроводность является единственным способом передачи теплоты. В вакууме теплопроводность отсутствует.

*Конвекция* – способ передачи теплоты за счет перемещения макрообъемов среды из области с одной температурой в область с другой температурой. При этом текучая среда (флюид) с более высокой температурой перемещается в область низких температур, а холодный флюид поступает

в область высоких температур. В вакууме конвекция теплоты невозможна.

Конвекция теплоты всегда происходит совместно с теплопроводностью (кондукцией теплоты), так как макрообъемы текучей среды состоят из микрочастиц вещества, и существует неравномерное по пространству температурное поле. Передачу теплоты совместно теплопроводностью и конвекцией называют *конвективным теплообменом*, который уже не является элементарным способом передачи теплоты. Конвективный теплообмен относят к *сложному теплообмену*.

*Тепловое излучение (радиационный теплообмен)* – способ переноса теплоты в пространстве, осуществляемый в результате распространения электромагнитных волн, энергия которых при взаимодействии с веществом переходит в теплоту. Радиационный теплообмен связан с двойным преобразованием энергии. На первом этапе радиационного теплообмена внутренняя энергия тела превращается в энергию электромагнитного излучения, а затем, после переноса энергии в пространстве электромагнитными волнами, происходит обратный переход лучистой энергии во внутреннюю энергию другого тела. Тепловое излучение вещества зависит от температуры тела (степени нагретости вещества). Поэтому все тела с температурой выше нуля Кельвина обладают собственным тепловым излучением. Для передачи теплоты излучением между телами не требуется тело-посредник, поэтому лучистая энергия может передаваться в вакууме.

В природе и в технических устройствах все три способа передачи теплоты могут происходить одновременно или в комбинации друг с другом. Такой теплообмен называют *сложным теплообменом*. Совместную передачу теплоты излучением и теплопроводностью называют *радиационно-кондуктивным теплообменом*. Совместную передачу

теплоты излучением, конвекцией и теплопроводностью называют *радиационно- конвективным теплообменом*.

## § 1.5. Расчет тепловых потоков в процессе теплообмена

Для всех способов переноса теплоты существует функциональная связь между переменным температурным полем и тепловым потоком в каждой точке этого поля, которую называют *основным законом переноса теплоты*.

Рассмотрим расчет теплового потока в области с заданным температурным полем в процессе теплопроводности, конвективного теплообмена и теплового излучения.

### § 1.5.1. Теплопроводность

В 1807 году французский ученый Фурье (Jean-Baptiste Joseph Fourier) установил, что в каждой точке тела в процессе теплопроводности существует функциональная связь между тепловым потоком и градиентом температуры:

$$\vec{Q} = -\lambda \text{grad}(T)F, \quad (1.21)$$

где  $Q$  – тепловой поток, Вт;  $\text{grad}(T)$  – градиент температурного поля, К/м;  $F$  – площадь поверхности теплообмена,  $\text{м}^2$ ;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К).

Закон Фурье для поверхностной плотности теплового потока имеет вид:

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad}(T). \quad (1.22)$$

Знак *минус* в записи закона Фурье (1.21) и (1.22) показывает, что векторы теплового потока и градиента температуры направлены в противоположные стороны. Градиент температурного поля направлен по нормали к

изотермической поверхности в сторону возрастания температуры, а тепловой поток, наоборот, в сторону ее убывания.

*Коэффициент теплопроводности*  $\lambda$  характеризует способность данного тела (вещества) проводить теплоту. Коэффициент теплопроводности веществ определяют экспериментально и приводят в справочной литературе.

Основной закон теплопроводности – закон Фурье справедлив для нестационарных и стационарных процессов теплопроводности в твердых, жидких и газообразных телах.

В теплотехнических расчетах для характеристики теплового состояния тела вместо температуры также используют тепловую внутреннюю энергию ( $u$ ) в изохорных и энтальпию ( $h$ ) в изобарных процессах теплообмена. В природе и технических устройствах теплообмен, как правило, происходит при постоянном давлении, поэтому основной закон теплопроводности (закон Фурье) в *энергетической* форме записывают в виде:

$$\bar{q} = -a \cdot \text{grad}(\rho h) = -a \cdot \text{grad}(h'), \quad (1.22, a)$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $h$  – удельная массовая энтальпия,  $\text{Дж}/\text{кг}$ ;  $h'$  – удельная объемная энтальпия,  $\text{Дж}/\text{м}^3$ ;  $\rho$  – плотность,  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

*Коэффициент температуропроводности* является физической характеристикой вещества, которую определяют экспериментально или рассчитывают по формуле:

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} = \frac{\lambda}{c'_p}, \quad (1.22, б)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ;  $\rho$  – плотность,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $c_p$  – удельная массовая изобарная теплоемкость тела,  $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ;  $c'_p = \rho c_p$  – удельная объемная изобарная теплоемкость тела,  $\text{Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$ .

Коэффициент температуропроводности характеризует скорость изменения температуры тела во времени – *видимую скорость* нагрева или охлаждения тела  $W_T$ , К/с:

$$W_T = \frac{\partial T}{\partial \tau} \sim a \quad (1.22,в)$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $m^2/c$ ;  $\tau$  – время процесса, с.

Анализ формулы (1.22,в) показывает, что скорость изменения температуры в каждом элементарном объеме тела пропорциональна коэффициенту температуропроводности.

### § 1.5.2. Конвективный теплообмен

*Конвекция теплоты* в текучих средах всегда протекает совместно с теплопроводностью. Поэтому плотность теплового потока при конвективном теплообмене *в каждом элементарном объеме* текучей среды рассчитывают по формуле:

$$\vec{q}_{\text{кто}} = \vec{q}_{\text{конд}} + \vec{q}_{\text{конв}} = -\lambda \nabla T_f + \rho \vec{w} \cdot dh, \quad (1.23)$$

где  $q_{\text{кто}}$  – плотность теплового потока при конвективном теплообмене,  $Вт/м^2$ ;  $q_{\text{конд}}$  – плотность теплового потока при кондуктивном (за счет теплопроводности) теплообмене в текучей среде,  $Вт/м^2$ ;  $q_{\text{конв}}$  – плотность теплового потока за счет конвекции текучей среды (флюида),  $Вт/м^2$ ;  $\lambda_f$  – коэффициент теплопроводности флюида,  $Вт/(м \cdot К)$ ;  $\nabla T_f$  – градиент температурного поля флюида,  $К/м$ ;  $\rho$  – плотность флюида,  $кг/м^3$ ;  $w$  – скорость движения флюида,  $м/с$ ;  $dh = c_p \cdot dT$  – удельная энтальпия элементарного объема флюида,  $Дж/кг$ ;  $c_p$  – удельная массовая изобарная теплоемкость,  $Дж/(кг \cdot К)$ ;  $dT$  – изменение температуры элементарного объема,  $^{\circ}С$  или  $К$ .

Из анализа формулы (1.23) следует, что для расчета теплового потока при конвективном теплообмене необходимо предварительно рассчитать температурное поле и поле скорости текучей среды, поэтому моделирование конвективного теплообмена включает в себя решение задачи механики жидкости и газа.

Тепловой поток, получаемый или отдаваемый однофазным теплоносителем, при его перемещении в теплообменнике с изменением температуры на конечную величину  $\delta T$ , равен:

$$Q = G \cdot c_p \delta T = \rho \dot{V} \cdot c_p \delta T, \quad (1.24)$$

где  $G = \rho \bar{w} \cdot f$  – массовый расход теплоносителя, кг/с;  $\dot{V} = G / \rho = \bar{w} \cdot f$  – объемный расход теплоносителя, м<sup>3</sup>/с;  $\bar{w}$  – средняя скорость течения флюида, м/с;  $f$  – площадь поперечного сечения канала, в котором движется теплоноситель, м<sup>2</sup>;  $c_p$  – удельная массовая изобарная теплоемкость, Дж/(кг·К);  $\delta T$  – изменение температуры теплоносителя в процессе теплообмена, °С (К).

Тепловой поток, получаемый или отдаваемый текучей средой, при изменении ее агрегатного состояния (жидкость  $\rightleftharpoons$  газ) рассчитывают по формуле:

$$Q = G \cdot r, \quad (1.25)$$

где  $G$  – массовый расход флюида, кг/с;  $r$  – скрытая теплота фазового перехода, Дж/кг.

### § 1.5.3. Теплообмен излучением

Энергия теплового излучения, падающего на тело, может поглощаться телом, отражаться от тела или проходить через данное тело. Тело, которое поглощает всю падающую на него лучистую энергию, называют *абсолютно черным*

телом (АЧТ). Отметим, что при данной температуре АЧТ и излучает максимально возможное количество энергии.

Плотность потока собственного излучения тела называют его лучеиспускательной способностью или интегральной интенсивностью излучения. Зная температуру тела, лучеиспускательную способность АЧТ рассчитывают по закону Стефана–Больцмана:

$$E_0 = \sigma_0 \cdot T^4 = c_0 \cdot \left( \frac{T}{100} \right)^4, \quad (1.26)$$

где  $E_0$  – лучеиспускательная способность АЧТ, Вт/м<sup>2</sup>;  $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>) – постоянная Стефана–Больцмана;  $c_0 = 5,67$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>) – коэффициент излучения абсолютно черного тела;  $T$  – абсолютная температура АЧТ, К.

Абсолютно черное тело – это идеальное тело, не существующее в природе. Собственное излучение реальных тел моделируют излучением *серого тела*. Расчет лучеиспускательной способности *серого тела* выполняют по формуле:

$$E = \varepsilon \cdot E_0. \quad (1.27)$$

С учетом закона Стефана-Больцмана формула (1.27) принимает вид:

$$E = \varepsilon \cdot E_0 = \varepsilon \cdot \sigma_0 T^4 \quad (1.28)$$

или

$$E = \varepsilon \cdot c_0 \left( \frac{T}{100} \right)^4 = c \cdot \left( \frac{T}{100} \right)^4, \quad (1.29)$$

где  $E$  – лучеиспускательная способность *серого* тела, Вт/м<sup>2</sup>;  $\varepsilon$  – интегральная степень черноты *серого* тела ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ );  $c = \varepsilon \cdot c_0$  – коэффициент излучения *серого* тела, Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>).

Степень черноты твердых тел определяют экспериментально и в зависимости от физических свойств тела, температуры тела и шероховатости поверхности приводят в справочниках. Степень черноты поглощающих и излучающих энергию газов рассчитывают на основе экспериментальных данных, приведенных в справочниках, в зависимости от температуры газа, его состава и размеров газового объема.

Тепловой поток собственного излучения тела (твердого, жидкого или газообразного) рассчитывают по формуле:

$$Q = E \cdot F_w = \varepsilon \sigma_0 T^4 \cdot F_w, \quad (1.30)$$

где  $F_w$  – площадь поверхности твердого тела или поверхности газовой оболочки,  $m^2$ ;  $\varepsilon$  – интегральная степень черноты серого тела.

**Замечание.** Тепловой поток собственного излучения обозначают двумя способами  $Q$  (без нижнего индекса) и  $Q_{\text{соб}}$  (с нижним индексом «соб» – собственный).

В расчетах нагрева или охлаждения тел используют результирующий лучистый тепловой поток, равный разности потоков поглощенного и собственного излучения:

$$Q_{\text{л}} = Q_{\text{погл}} - Q, \quad (1.31)$$

где  $Q_{\text{л}} = Q_{\text{рез}} = Q_w$  – результирующий радиационный тепловой поток, Вт;  $Q_{\text{погл}}$  – поглощенный телом тепловой поток, Вт;  $Q$  – тепловой поток собственного излучения, Вт.

## § 1.6. Теплоотдача

*Теплоотдача* – это процесс сложного теплообмена в области пограничного слоя на границе раздела фаз:

- между твёрдой стенкой и окружающей средой;
- между капельной жидкостью и окружающей средой.

Процесс теплоотдачи между капельной жидкостью и окружающей средой – газом, как правило, сопровождается массообменом.

Под *окружающей средой (окружением)* для тела (твердого или жидкого) при его теплоотдаче понимают:

– при *конвективной* теплоотдаче любую текучую среду (жидкость или газ);

– при *лучистой* теплоотдаче излучающую и поглощающую газовую среду, либо систему твердых тел (оболочку), разделенных с данным телом лучепрозрачной или частично поглощающей излучение газовой средой.

График температурного поля при *теплоотдаче* между твердой стенкой и окружающей текучей средой показан на рис. 1.5. Температура текучей среды  $T_f$  изменяется до температуры стенки  $T_w$  в очень узкой области, которую называют *тепловым пограничным слоем* толщиной  $\delta_{тпс}$ .

Заметим, что в зависимости от соотношения температур стенки  $T_w$  и флюида  $T_f$  тепловой поток  $Q$  может поступать на тело при условии  $T_f > T_w$  или уходить с поверхности тела, если  $T_f < T_w$ .

*Конвективная теплоотдача* происходит за счет конвективного теплообмена и в чистом виде имеет место при течении капельной жидкости не пропускающей излучение около твердых поверхностей различной формы.

Конвективная теплоотдача может происходить одновременно с изменением агрегатного состояния теплоносителя, которое сопровождается выделением (при конденсации) или поглощением (при кипении и испарении) теплоты фазового перехода.

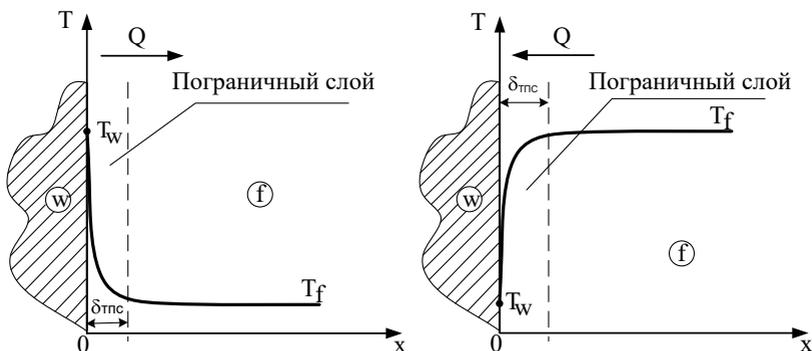


Рис. 1.5. Схема процесса теплоотдачи:

$T_w$  – температура стенки;  $T_f$  – температура текучей среды;  
 $\delta_{тпс}$  – толщина теплового пограничного слоя

*Лучистая (радиационная) теплоотдача* имеет место при радиационном теплообмене между стенкой и излучающим (поглощающим) газом, а также между стенкой и твердой оболочкой, заполненной лучепрозрачным или частично поглощающим излучение газом. В чистом виде лучистая теплоотдача имеет место при радиационном теплообмене в вакууме или сильно разреженных газах.

Если твердое тело или жидкость окружает газ, то в этом случае теплообмен на границе раздела фаз происходит одновременно за счет конвективного теплообмена и теплового излучения. Такой процесс сложного теплообмена называют *радиационно-конвективной теплоотдачей*.

Расчет *теплоотдачи* заключается в определении теплового потока, которым обмениваются стенка и окружающая среда. В инженерных расчетах тепловой поток при теплоотдаче находят по закону теплоотдачи Ньютона (1701 г.)

$$Q = \alpha \cdot |T_f - T_w| \cdot F_w \quad \text{или} \quad q = \alpha \cdot |T_f - T_w|, \quad (1.32)$$

где  $Q$  – тепловой поток, Вт;  $q$  – поверхностная плотность теплового потока, Вт/м<sup>2</sup>;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи,

$\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ;  $T_f$  – температура окружающей среды,  $^{\circ}\text{С}$  (К);  $T_w$  – температура поверхности тела (поверхности раздела фаз),  $^{\circ}\text{С}$  (К);  $F_w$  – площадь поверхности теплообмена,  $\text{м}^2$ .

**Замечание.** В расчетах теплообмена также используют энергетическую форму записи основных законов и дифференциальных уравнений переноса теплоты. Энергетическая форма записи в качестве параметра, характеризующего тепловое состояние вещества, использует не температуру, а его внутреннюю энергию ( $u$  [Дж/(кг)] и  $u'$  [Дж/(м<sup>3</sup>)] или энтальпию ( $h$  [Дж/(кг)] и  $h'$  [Дж/(м<sup>3</sup>)]). В этом случае закон теплоотдачи Ньютона принимает вид:

$$Q = \frac{\alpha}{\rho c_p} \cdot |h'_f - h'_w| \cdot F_w = \alpha_h \cdot |h'_f - h'_w| \cdot F_w \quad (1.33)$$

или

$$q = \alpha_h \cdot |h'_f - h'_w|, \quad (1.34)$$

где  $\alpha_h = \alpha / (\rho c_p)$  – энергетический коэффициент теплоотдачи при записи закона теплоотдачи в энергетической форме, м/с;  $h' = \rho c_p \cdot T = c'_p \cdot T$  – удельная объемная энтальпия, Дж/м<sup>3</sup>;  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $c_p$  – удельная массовая изобарная теплоемкость, Дж/(кг·К);  $c'_p$  – удельная объемная изобарная теплоемкость, Дж/(м<sup>3</sup>·К).

При заданных геометрических размерах системы теплообмена, известных температурах поверхности тела и течучей среды задача расчета теплового потока сводится к определению коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ .

Коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  не имеет физического смысла и является коэффициентом пропорциональности в законе теплоотдачи Ньютона, который зависит от ряда параметров:

$$\alpha = f(x_i, T, \vec{w}, p, \Phi C), \quad (1.35)$$

где  $x_i$  – координаты, м; температура, °C (K);  $\bar{w}$  – скорость флюида в заданной точке системы, м/с;  $p$  – давление, Па; ФС – физические свойства текучей среды (плотность, теплоемкость, динамический и кинематический коэффициенты вязкости, коэффициенты теплопроводности и температуропроводности).

В нестационарных процессах теплообмена при изменяющейся температуре в пространстве и времени функция (1.35) является существенно нелинейной, потому что физические свойства текучей среды зависят от температуры, а для газов и от давления. В инженерных расчетах нелинейный характер зависимости коэффициента теплоотдачи от температуры учитывают расчетом  $\alpha$  для заданного интервала температур.

Коэффициент *конвективной* теплоотдачи  $\alpha_k$  находят экспериментально, следуя правилам и требованиям *теории подобия*, а результаты эксперимента представляют в виде критериальных уравнений подобия. Критериальные уравнения приведены в справочниках и учебниках по тепломассообмену и будут рассмотрены ниже.

Коэффициент *лучистой* теплоотдачи  $\alpha_l$  между телом (твердым или жидким) и окружением рассчитывают по формуле:

$$\alpha_l = \frac{Q_l}{|T_f - T_w| \cdot F_w} = \frac{q_l}{|T_f - T_w|} = \frac{\varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 |T_f^4 - T_w^4|}{|T_f - T_w|}, \quad (1.36)$$

где  $Q_l = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 |T_f^4 - T_w^4| \cdot F_w$  – результирующий тепловой поток излучением между поверхностью тела и окружением, Вт;  $q_l = Q_l / F_w$  – плотность результирующего лучистого теплового потока, Вт/м<sup>2</sup>;  $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·K<sup>4</sup>) – постоянная Стефана–Больцмана;  $T_f$  – температура окружающей

среды в Кельвинах (К);  $T_w$  – температура поверхности тела в Кельвинах (К);  $F_w$  – площадь поверхности теплообмена,  $m^2$ ;  $\varepsilon_{пр}$  – приведенная степень черноты в системе тел, участвующих в радиационном теплообмене.

Например, приведенную степень черноты в системе излучающий газ – стенка можно рассчитать по формуле Нуссельта:

$$\varepsilon_{пр} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_g} + \frac{1}{\varepsilon_w} - 1}, \quad (1.37)$$

где  $\varepsilon_g$  и  $\varepsilon_w$  – степень черноты излучающего газа и стенки соответственно.

Тепловой поток при *радиационно-конвективной* теплоотдаче находят по формуле:

$$Q = Q_k + Q_l = (\alpha_k + \alpha_l) \cdot |T_f - T_w| \cdot F_w, \quad (1.38)$$

где  $Q_k$  – тепловой поток конвективной теплоотдачей, Вт;  $Q_l$  – тепловой поток лучистой теплоотдачей, Вт;  $\alpha_k$  – коэффициент конвективной теплоотдачи, Вт/( $m^2 \cdot K$ );  $\alpha_l$  – коэффициент лучистой теплоотдачи, Вт/( $m^2 \cdot K$ ).

## § 1.7. Теплопередача

Термин *теплопередача* в теории *теплообмена* используют в широком и узком смысле этого слова.

Во-первых, под *теплопередачей* понимают процесс переноса теплоты в переменном температурном поле всеми возможными способами теплопереноса при всем многообразии условий однозначности. В этом случае термин *теплопередача* является синонимом термина *теплообмен*.

Во-вторых, под термином *теплопередача* понимают процесс передачи теплоты между двумя текучими средами через непроницаемую стенку любой геометрической формы в стационарном и нестационарном режимах теплообмена.

Согласно второму закону термодинамики процесс теплопередачи идет от текучей среды с большей температурой (горячего флюида) к текучей среде с меньшей температурой (холодному флюиду).

Процесс *теплопередачи* через непроницаемую стенку произвольной формы показан на рис. 1.6 и включает в себя следующие процессы:

- а) *теплоотдачу* от горячей текучей среды (горячего флюида) к стенке;
- б) *теплопроводность* внутри стенки;
- в) *теплоотдачу* от стенки к холодной текучей среде (холодному флюиду).

Теплоотдача между стенкой и флюидом в общем случае может происходить путем конвективного теплообмена и излучения одновременно.

Тепловой поток от текучей среды с температурой  $T_{f1}$  к среде с температурой  $T_{f2}$  через непроницаемую стенку, площадь поверхности которой со стороны горячего флюида равна  $F_1$ , а со стороны холодного теплоносителя –  $F_2$ , рассчитывают по формуле:

$$Q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1 F_1} + \frac{\bar{\delta}}{\lambda F_{cp}} + \frac{1}{\alpha_2 F_2}} = \frac{\Delta T}{R_{t,F}}, \quad (1.39)$$

где  $\bar{\delta}$  – средняя толщина стенки, м;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности стенки, Вт/(м·К);  $F_1$  и  $F_2$  – площади поверхностей теплообмена, м<sup>2</sup>;  $F_{cp}$  – средняя между  $F_1$  и  $F_2$  площадь, м<sup>2</sup>;  $\alpha_1$  – коэффициент теплоотдачи от горячего

флюида к стенке,  $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ;  $\alpha_2$  – коэффициент теплоотдачи от стенки к холодному флюиду,  $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ;  $\Delta T = T_{f1} - T_{f2}$  – перепад температур между флюидами,  $^{\circ}\text{C}$  (К);  $R_{t,F}$  – термическое сопротивление теплопередачи стенки площадью  $F$ ,  $\text{К}/\text{Вт}$ .

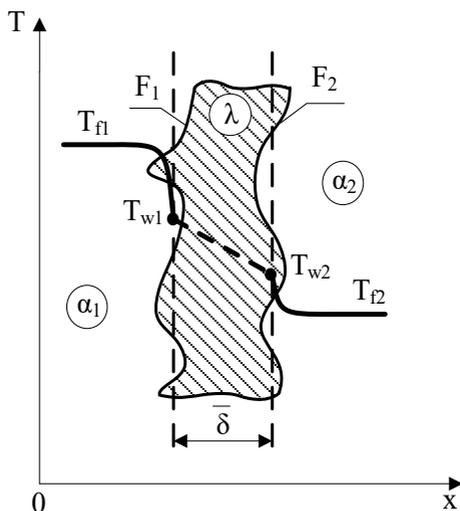


Рис. 1.6. Схема процесса теплопередачи:

$F_1$  – площадь поверхности со стороны горячего теплоносителя;  
 $F_2$  – площадь поверхности со стороны холодного теплоносителя;

$\bar{\delta}$  – средняя толщина стенки

Термическое сопротивление теплопередаче стенки, учитывающее площадь поверхностей теплообмена, равно:

$$\begin{aligned}
 R_{t,F} &= R_{t,F_1} + R_{t,F_{cp}} + R_{t,F_2} = \frac{R_{t,1}}{F_1} + \frac{R_{t,2}}{F_{cp}} + \frac{R_{t,3}}{F_2} = \\
 &= \frac{1}{\alpha_1 \cdot F_1} + \frac{\bar{\delta}}{\lambda} \cdot \frac{1}{F_{cp}} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot F_2},
 \end{aligned}
 \tag{1.40}$$

где  $R_{t,1} = 1/\alpha_1$  – термическое сопротивление теплоотдачи от горячего флюида к стенке;  $R_{t,2} = \bar{\delta}/\lambda$  – термическое сопротивление теплопроводности плоской стенки;  $R_{t,3} = 1/\alpha_2$  – термическое сопротивление теплоотдачи от стенки к холодному теплоносителю.

Для вывода частных формул теплопередачи через стенки простой (классической, канонической) формы необходимо в формулы (1.39) и (1.40) подставить значения площадей:

а) плоская стенка

$$F_1 = F_2 = F_{cp} = F;$$

б) цилиндрическая стенка

$$F_1 = \pi d_1 \ell; F_2 = \pi d_2 \ell; F_{cp} = (F_2 - F_1) / \ln(F_2 / F_1);$$

в) шаровая стенка

$$F_1 = \pi \cdot d_1^2; F_2 = \pi \cdot d_2^2; F_{cp} = \sqrt{F_1 \cdot F_2}.$$

Использование в расчетах формулы теплопередачи через стенки произвольной формы (1.39) позволяет разработать универсальную процедуру расчета теплопередачи через стенки классической формы. Формулу расчета теплопередачи (1.39) также можно использовать для приближенного расчета теплопередачи через стенки сложной (неклассической) формы. При этом сложную конфигурацию стенки моделируют (заменяют) стенкой простой формы, соблюдая

равенство площадей поверхностей теплообмена. Например, толстостенный контейнер в форме параллелепипеда с приблизительно одинаковыми линейными размерами моделируют шаровой стенкой, толстостенную трубу квадратного или прямоугольного поперечного сечения – цилиндрической стенкой.

### **Контрольные вопросы** *по материалам первой главы*

1. Назовите отличие равновесных и неравновесных термодинамических систем (ТДС). Какие ТДС используют в расчетах ТМО и почему?

2. Назовите два способа использования теплоты. В чем их принципиальное отличие?

3. Опишите идею феноменологического метода исследования процессов ТМО.

4. Почему изучение процессов переноса теплоты и массы объединяют в одну дисциплину тепломассообмен?

5. Дайте характеристику температурного поля. Приведите примеры температурных полей.

6. Дайте определение изотермических поверхностей и докажите необходимость их определения в расчетах теплообмена.

7. Назовите признаки тел простой формы. Почему в этих телах развиваются только одномерные температурные поля?

8. Назовите три характеристики градиента температуры. Напишите формулу расчета температурного градиента в телах простой формы.

9. Какие единицы измерения энергии используют в технике? Назовите их соотношение.

10. Дайте определение понятиям количество теплоты, тепловой поток, удельные тепловые потоки и напишите формулы их расчета.

11. Назовите элементарные способы переноса теплоты. Почему теплота не может распространяться только за счет конвекции текучей среды?

12. Дайте определение понятия «тепловой пограничный слой».
13. Назовите условия, при которых происходит только конвективная или только лучистая теплоотдача.
14. Напишите формулу функциональной связи температурного поля и теплового потока при переносе теплоты теплопроводностью.
15. Напишите формулу функциональной связи температурного поля и теплового потока при переносе теплоты за счет перемещения текучей среды.
16. Напишите формулу функциональной связи температурного поля и теплового потока при лучистом переносе теплоты.
17. Дайте определение понятия «теплоотдача» и опишите процесс теплоотдачи.
18. Назовите физический смысл коэффициента теплоотдачи.
19. Напишите формулу закона теплоотдачи Ньютона.
20. Назовите параметры, от которых зависит коэффициент теплоотдачи.
21. Дайте определение понятия «теплопередача» и опишите процесс теплопередачи.

## ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАССООБМЕНА

Цель расчета массообмена состоит в определении *полей концентрации* компонент смеси и *потоков массы* этих компонент в многокомпонентной среде, которая состоит из системы тел (твердых, жидких, газообразных). В природе наблюдается аналогия процессов переноса теплоты и массы, поэтому формулировки основных параметров и законов массообмена аналогичны формулировкам параметров и законов теплообмена. Аналогия процессов теплообмена и массообмена проявляется также в аналогичной форме записи дифференциальных уравнений переноса теплоты и массы. При дальнейшем изложении основ массообмена будем использовать данное обстоятельство.

Процесс массообмена будем рассматривать в виде *молекулярной диффузии*, возникающей из-за разности концентраций в данной системе твердых и текучих сплошных сред, которую называют молекулярной *концентрационной* диффузией. Заметим, что в природе также существует молекулярный перенос массы в среде с переменным температурным полем – *термодиффузия* и в среде с переменным полем давления – *бародиффузия*. При термодиффузии (эффект Соре) молекулы с меньшей массой стремятся в область высоких температур и, соответственно, с большей массой – в область низких температур. При наличии в среде градиента давления молекулы большей массы переходят в область высокого давления, а более легкие молекулы стремятся в область пониженного давления (эффект Дюфура). В теплотехнических расчетах, как правило, влияние термодиффузии и бародиффузии на массоперенос не учитывают из-за их малости.

В природе и технических устройствах наиболее часто массоперенос происходит в двухкомпонентных (бинарных)

системах: газ – газ, газ – капельная жидкость, жидкость – жидкость, расплав вещества – твердое тело, твердое тело – твердое тело. В общем случае массообмен может происходить и в многокомпонентной среде, однако в этом случае математическое описание массопереноса представляет собой весьма нетривиальную задачу. Поэтому в инженерных расчетах с целью упрощения задачи многокомпонентную смесь заменяют бинарной смесью, объединяя все компоненты смеси в две группы по молекулярной массе.

При изложении основ массообмена примем допущение о равенстве нулю источников и стоков массы в сплошной многокомпонентной среде. Это допущение справедливо, если в смеси отсутствуют химические и иные превращения вещества (скорость возникновения и исчезновения компонентов смеси равна нулю).

## § 2.1. Поле концентраций. Градиент концентрации

При наличии в среде неоднородного поля концентраций  $i$ -го компонента смеси происходит *самопроизвольный* и *необратимый* процесс переноса массы этого компонента в направлении уменьшения его концентрации, то есть происходит процесс *массообмена*. В движущихся средах массообмен зависит и от скорости перемещения среды.

Расчет *массообмена* заключается в определении *поля концентраций* компонент смеси и *потоков массы* компонент смеси.

В расчетах массообмена используют объемную концентрацию (парциальную плотность) и массовую (относительную) концентрацию. По определению, объемная концентрация (парциальная плотность) ( $\rho_i$ , кг/м<sup>3</sup>) и относительная массовая концентрация ( $C_i$ , кг/кг)  $i$ -го компонента смеси равны:

$$\rho_i = \frac{M_i}{V_{\text{см}}}; \quad (2.1)$$

$$C_i = \frac{M_i}{M_{\text{см}}}, \quad (2.2)$$

где  $V_{\text{см}}$  – объем смеси,  $\text{м}^3$ ;  $M_i$  – масса  $i$ -го компонента смеси, кг;  $M_{\text{см}}$  – масса смеси, кг.

Выражая массу  $i$ -го компонента смеси из формул (2.1) и (2.2), получим равенство:

$$M_i = \rho_i \cdot V_{\text{см}} = C_i \cdot M_{\text{см}},$$

из которого следует функциональная связь парциальной плотности (объемной концентрации)  $i$ -го компонента смеси  $\rho_i$  и его относительной массовой концентрации  $C_i$ :

$$\rho_i = \rho C_i \quad \text{и} \quad C_i = \rho_i / \rho, \quad (2.3)$$

где  $\rho = M_{\text{см}} / V_{\text{см}}$  – плотность смеси,  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

При этом имеет место равенство:

$$\sum_{i=1}^n \rho_i = \rho \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n C_i = 1, \quad (2.4)$$

где  $n$  – число компонентов смеси.

Для бинарной двухкомпонентной смеси ( $n = 2$ ) выражения (2.4) принимают вид:

$$\rho_1 + \rho_2 = \rho \quad \text{и} \quad C_1 + C_2 = 1, \quad (2.5)$$

**Замечание.** В химических реакциях количество вещества измеряют в молях (киломолях), поэтому в расчетах массообмена используют молярную концентрацию  $C_{\mu,i}$ ,  $\text{кмоль}/\text{м}^3$ :

$$C_{\mu,i} = \frac{n_i}{V_{\text{см}}} = \frac{\rho_i}{\mu_i} = \frac{\rho C_i}{\mu_i}, \quad (2.6)$$

где  $n_i$  – количество вещества  $i$ -го компонента смеси, кмоль;  $V_{см}$  – объем смеси,  $m^3$ ;  $\mu_i$  – молярная масса вещества  $i$ -го компонента смеси, кг/кмоль;  $\rho_i$  – парциальная плотность  $i$ -го компонента смеси,  $кг/м^3$ ;  $\rho$  – плотность смеси,  $кг/м^3$ ;  $C_i$  – массовая концентрация  $i$ -го компонента смеси,  $кг/кг$ .

*Поле концентраций*  $i$ -го компонента смеси есть совокупность значений концентраций этого компонента смеси во всех точках данной расчетной области и во времени.

В зависимости от способа задания концентрации поле концентраций  $i$ -го компонента смеси обозначают как  $\rho_i(x_j, \tau)$  или  $C_i(x_j, \tau)$ .

Поле концентрации, в зависимости от числа координат  $x_j$ , может быть трехмерным, двумерным и одномерным.

Поле концентрации, изменяющееся во времени, называют *нестационарным* и, наоборот, поле концентраций не изменяющееся с течением времени – *стационарным*.

*Градиент концентрации*  $i$ -го компонента смеси – вектор, направленный по нормали к поверхности равных концентраций в сторону увеличения концентрации и численно равный изменению концентрации на единицу длины.

Для парциальной плотности  $i$ -го компонента смеси  $\rho_i$  и его относительной массовой концентрации  $C_i$  градиент концентрации рассчитывают по формулам:

$$\nabla(\rho_i) = \frac{\partial \rho_i}{\partial n} \vec{n}_0; \quad (2.7)$$

$$\nabla(C_i) = \frac{\partial C_i}{\partial n} \vec{n}_0, \quad (2.8)$$

где  $n$  – нормаль к поверхности равных концентраций;  $\vec{n}_0$  – единичный вектор нормали;  $\nabla \equiv \text{grad}$  – символ градиента.

## § 2.2. Поток массы. Плотность потока массы

Для количественного описания процесса переноса массы используют понятия *поток массы* и *плотность потока массы* данного компонента смеси.

*Поток массы*  $i$ -го компонента смеси равен массе этого компонента, которая проходит через заданную и нормальную к направлению распространения массы поверхность в *единицу времени*:

$$\vec{m}_i = \frac{dM_i}{d\tau} \vec{n}_0, \quad (2.9)$$

где  $\vec{m}_i$  – поток массы  $i$ -го компонента смеси, кг/с;  $\vec{n}_0$  – единичный вектор нормали;  $M_i$  – масса  $i$ -го компонента смеси, кг;  $\tau$  – время, с.

*Плотность потока массы*  $i$ -го компонента смеси равна массе этого компонента, которая проходит через заданную и нормальную к направлению распространения массы *единичную* площадку в *единицу времени* или равна потоку массы, проходящему через заданную *единичную* площадку:

$$\vec{j}_i = \frac{d^2M_i}{d\tau \cdot dF} \vec{n}_0 = \frac{d\vec{m}_i}{dF}, \quad (2.10)$$

где  $\vec{j}_i$  – плотность потока массы  $i$ -го компонента смеси, кг/(с·м<sup>2</sup>);  $F$  – площадь поверхности массообмена, м<sup>2</sup>.

При стационарном режиме массообмена и при одинаковых условиях массообмена на всей поверхности  $F$  поток массы и плотность потока массы не изменяются во времени, поэтому их рассчитывают по формулам:

$$m_i = \frac{M_i}{\tau}; \quad j_i = \frac{M_i}{\tau \cdot F} = \frac{m_i}{F}, \quad (2.11)$$

где  $\tau$  – время переноса массы, с;  $F$  – площадь поверхности массообмена,  $m^2$ .

### § 2.3. Способы переноса массы. Расчет потока массы в процессе массообмена

Аналогично переносу теплоты теплопроводностью (диффузией теплоты) и конвекцией, в природе существуют два механизма массопереноса: *диффузионный* и *конвективный*. При этом конвекция массы в текучих средах всегда происходит совместно с ее диффузией, и такой процесс переноса называют *конвективным массообменом* по аналогии с *конвективным теплообменом*. Для определения конвективного массообмена также используют термин *конвективная диффузия*.

#### § 2.3.1. Диффузионный массоперенос

Согласно молекулярно-кинетической теории механизм *молекулярной* или *концентрационной* диффузии компонент смеси заключается во взаимном проникновении микрочастиц (атомов, молекул, ионов) разных сортов в результате их движения в сторону уменьшения своей концентрации. При наличии переменного поля концентраций диффузия существует в твердых, жидких и газообразных средах. Для отдельно протекающих процессов теплообмена и массообмена функциональную связь между плотностью потока массы и полем концентрации устанавливает закон Фика (1855 г.):

$$\vec{j}_i = -D_i \cdot \text{grad}(\rho_i) \quad (2.12)$$

или

$$\vec{j}_i = -\rho D_i \cdot \text{grad}(C_i), \quad (2.13)$$

где  $D_i$  – коэффициент диффузии  $i$ -го компонента смеси,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  
 $\text{grad}(\rho_i)$  – градиент парциальной плотности,  $(\text{кг}/\text{м}^3)/\text{м}$ ;  
 $\text{grad}(C_i)$  – градиент относительной массовой концентрации,  
 $(\text{кг}/\text{кг})/\text{м}$ .

Знак *минус* в записи закона Фика (2.12) и (2.13) показывает, что векторы потока массы и градиента концентрации направлены в противоположные стороны. Поэтому в системе координат, принятой в учебнике, учитывая противоположные направления потока массы и градиента концентрации, знак *минус* в записи закона Фика можно опустить. При моделировании массообмена на компьютере знак направления потоков массы и градиентов концентрации учитывается автоматически при представлении закона Фика в численном виде.

В качестве примера запишем закон Фика для бинарной смеси в скалярной форме:

$$j_1 = D_{12} \cdot \text{grad}(\rho_1); \quad (2.14)$$

$$j_2 = D_{21} \cdot \text{grad}(\rho_2); \quad (2.15)$$

или

$$j_1 = \rho D_{12} \cdot \text{grad}(C_1); \quad (2.16)$$

$$j_2 = \rho D_{21} \cdot \text{grad}(C_2), \quad (2.17)$$

где  $D_{12}$  – коэффициент диффузии первого компонента бинарной смеси во вторую среду,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $D_{21}$  – коэффициент диффузии второго компонента смеси в первую среду,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $\text{grad}(\rho_1)$  и  $\text{grad}(\rho_2)$  – градиент парциальной плотности первого и второго компонентов бинарной смеси соответственно,  $(\text{кг}/\text{м}^3)/\text{м}$ ;  $\text{grad}(C_1)$  и  $\text{grad}(C_2)$  – градиент относительной массовой концентрации первого и второго компонента бинарной смеси соответственно,  $(\text{кг}/\text{кг})/\text{м}$ .

Для бинарных смесей коэффициент диффузии записывают как  $D_{12}$  или  $D_{21}$ , где нижними индексами обозначены диффундирующее вещество и среда, в которой происходит процесс массообмена. В инженерных расчетах принимают равенство коэффициентов диффузии  $D_{12} = D_{21} = D$ .

Коэффициент молекулярного переноса массы – *коэффициент молекулярной диффузии* – является физическим параметром вещества, который характеризует интенсивность переноса массы  $i$ -го компонента смеси или диффузионные свойства многокомпонентной среды. Коэффициент диффузии находят экспериментально и в зависимости от температуры, а для газов и в зависимости от давления, приводят в справочной литературе.

Коэффициент диффузии в значительной степени зависит от фазового состояния бинарной смеси. В газах коэффициент диффузии при нормальных физических условиях имеет порядок  $10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с. При этом с увеличением молекулярной массы и давления коэффициент диффузии уменьшается, а с ростом температуры – увеличивается. Например, для бинарной смеси «воздух–пар» при нормальных физических условиях ( $p_0 = 101325$  Па и  $T_0 = 273,15$  К) коэффициент взаимной диффузии равен  $D_0 = 2,16 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с, а при других значениях давления ( $p$ , Па) и абсолютной температуры ( $T$ , К) коэффициент диффузии можно рассчитать по эмпирической формуле:

$$D = D_0 \cdot \frac{p_0}{p} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1,81} . \quad (2.18)$$

В капельных жидкостях коэффициент диффузии на четыре порядка меньше, чем в газах (порядок  $\sim 10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с) и с увеличением молекулярной массы и вязкости жидкости коэффициент диффузии уменьшается, а с ростом температуры – увеличивается. Например, для кислорода, растворенного в

воде, при нормальной температуре  $T_0 = 273,15$  К коэффициент диффузии равен  $D_0 = 1,8 \cdot 10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с.

В твердых телах коэффициент диффузии зависит от структуры твердого тела (наличия пор) и его молекулярного строения, а также от фазового состояния диффундирующего вещества. Наименьший коэффициент диффузии в твердых телах существует в процессе легирования – нанесения защитного слоя из легирующего материала на твердое тело. Например, для бинарной системы Mn-Ni – марганец в виде расплава, а никель – твердое тело, коэффициент диффузии имеет порядок  $\sim 10^{-15}$  м<sup>2</sup>/с и в значительной степени зависит от концентрации легирующего вещества – марганца.

**Замечание.** Обратим внимание, что запись закона Фика в виде (2.12) аналогична форме записи закона Фурье в энергетической форме (1.22, а), а запись закона Фика в виде (2.13) аналогична форме записи закона Фурье для температуры (1.22), который устанавливает функциональную зависимость теплового потока от температуры в процессе теплопроводности в переменном температурном поле. В этом случае поле относительной массовой концентрации  $C(x_j, \tau)$  в [кг/кг] аналогично температурному полю  $T(x_j, \tau)$  в градусах Цельсия или Кельвинах [ $^{\circ}\text{C}$  (К)], а коэффициент  $(\rho D_i)$  с размерностью [(кг/м<sup>3</sup>)·(м<sup>2</sup>/с) = кг/(с·м)] аналогичен коэффициенту теплопроводности  $\lambda$ , размерность которого равна [Дж/(с·м·К) = Вт/(м·К)]. Поэтому коэффициент  $(\rho D_i)$  можно по аналогии с коэффициентом теплопроводности назвать *коэффициентом массопроводности*, обозначив как:

$$\lambda_D = \rho D_i. \quad (2.19)$$

Тогда закон Фика (2.13) для относительной массовой концентрации  $C_i$  принимает вид:

$$\vec{j}_i = -\lambda_D \cdot \text{grad}(C_i) \quad (2.20)$$

или с учетом знака градиента в скалярной форме записи:

$$j_i = \lambda_D \cdot \text{grad}(C_i). \quad (2.21)$$

### § 2.3.2. Конвективный массоперенос

В движущейся многокомпонентной смеси совместно с диффузией происходит конвективный массоперенос. В этом случае плотность потока массы  $i$ -го компонента смеси равна сумме диффузионной и конвективной его составляющих в каждом элементарном объеме смеси:

$$\vec{J}_{i, \text{кмо}} = \vec{J}_{i, \text{дифф}} + \vec{J}_{i, \text{конв}} = -\rho D_i \text{grad}(C_i) + \rho \vec{w} C_i, \quad (2.22)$$

где  $\vec{J}_{i, \text{кмо}}$  – плотность потока массы при конвективном массообмене,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ;  $\vec{J}_{i, \text{дифф}} = -\rho D_i \text{grad}(C_i)$  – плотность молекулярного диффузионного потока массы,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ;  $\vec{J}_{i, \text{конв}} = \rho \vec{w} C_i$  – плотность конвективного потока массы,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ;  $C_i$  – массовая относительная концентрация  $i$ -го компонента смеси,  $\text{кг}/\text{кг}$ .

Если в расчетах массообмена используют парциальную плотность  $i$ -го компонента смеси  $\rho_i$ , то в этом случае выражение (2.22) принимает вид:

$$\vec{J}_{i, \text{кмо}} = \vec{J}_{i, \text{дифф}} + \vec{J}_{i, \text{конв}} = -D_i \text{grad}(\rho_i) + \vec{w} \rho_i, \quad (2.23)$$

где  $\vec{J}_{i, \text{дифф}} = -D_i \text{grad}(\rho_i)$  – плотность молекулярного диффузионного потока массы,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ;  $\vec{J}_{i, \text{конв}} = \vec{w} \rho_i$  – плотность конвективного потока массы,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ .

### § 2.4. Массоотдача

В переменном поле концентраций конвективный массообмен происходит в объеме жидкого или газообразного тела и на границе раздела фаз в области диффузионного

пограничного слоя. В этом случае говорят о процессе *массоотдачи*.

*Массоотдача* – это процесс массообмена на границе раздела фаз:

- между твёрдой стенкой и окружающей текучей средой (капельной жидкостью или газом);
- между капельной жидкостью и газом.

График изменения концентрации при *массоотдаче* на поверхности раздела фаз показан на рис. 2.1. Концентрация *i*-го компонента смеси изменяется в очень узкой области, которую называют *диффузионным пограничным слоем* толщиной  $\delta_{\text{дпс}}$ .

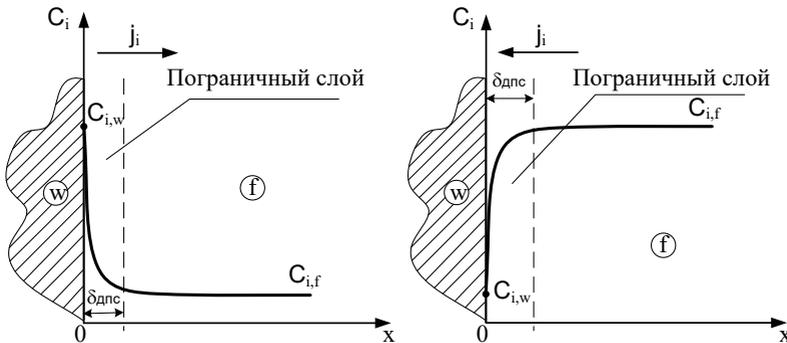


Рис. 2.1. Схема процесса массоотдачи:

$C_{i,f}$  и  $C_{i,w}$  – относительные массовые концентрации *i*-го компонента смеси в текучей среде и на поверхности раздела фаз;  
 $\delta_{\text{дпс}}$  – толщина диффузионного пограничного слоя

Аналогично закону теплоотдачи Ньютона для температуры (1.32)

$$q = \alpha \cdot |T_f - T_w|$$

или для удельной объемной энтальпии (1.33)

$$q = \frac{\alpha}{\rho c_p} \cdot |h'_f - h'_w| = \alpha_h \cdot |h'_f - h'_w|$$

закон массоотдачи для плотности потока массы  $j_i$  записывают в виде:

– для относительной массовой концентрации  $C_i$

$$j_{i,w} = \beta \rho \cdot |C_{i,f} - C_{i,w}| = \beta_c \cdot |C_{i,f} - C_{i,w}|; \quad (2.24)$$

– для парциальной плотности  $\rho_i$

$$j_{i,w} = \beta \cdot |\rho_{i,f} - \rho_{i,w}|, \quad (2.25)$$

где  $j_{i,w}$  – плотность потока массы  $i$ -го компонента смеси, поступающего на поверхность или уходящего с поверхности,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ;  $\rho$  – плотность смеси,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $\beta$  – коэффициент массоотдачи,  $\text{м}/\text{с}$ ;  $\beta_c = \beta \rho$  – коэффициент массоотдачи при использовании в расчетах относительной массовой концентрации ( $C_i$ ),  $\text{кг}/(\text{с} \cdot \text{м}^2)$ ;  $\rho_{i,f}$  и  $\rho_{i,w}$  – парциальные плотности  $i$ -го компонента смеси в текучей среде и на поверхности раздела фаз,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $C_{i,f}$  и  $C_{i,w}$  – массовые (относительные) концентрации  $i$ -го компонента смеси в текучей среде и на поверхности раздела фаз (в области вязкого подслоя диффузионного пограничного слоя),  $\text{кг}/\text{кг}$ .

**Замечание.** При использовании для характеристики теплообмена объемной плотности тепловой энергии  $h'$  [ $\text{Дж}/(\text{м}^3)$ ], а для характеристики массообмена объемной плотности массы  $\rho_i$  [ $\text{кг}/\text{м}^3$ ] коэффициент теплоотдачи  $\alpha_h = \alpha / (\rho c_p)$  и коэффициент массоотдачи  $\beta$  имеют одинаковую размерность [ $\text{м}/\text{с}$ ].

Закон массоотдачи отражает только экспериментально подтвержденный факт пропорциональной зависимости потока массы от разности концентрации. Коэффициент пропорциональности в законе массоотдачи – коэффициент массоотдачи – не имеет физического смысла и зависит от режима движения и физических свойств текучей многокомпонентной среды в данном *тепло-массообменном* или *массообменном* аппарате. Коэффициенты массоотдачи находят

по эмпирическим формулам, которые получены в результате обработки экспериментальных данных, следуя требованиям и правилам теории подобия (см. часть IV учебника).

**Контрольные вопросы**  
*по материалам второй главы*

1. Назовите цель расчета массообмена.
2. Поясните особенности концентрационной диффузии, термодиффузии и бародиффузии.
3. Перечислите способы задания концентрации в расчетах массообмена и напишите формулы их функциональной связи.
4. Дайте характеристику поля концентраций и приведите примеры таких полей.
5. Дайте определение и напишите формулу расчета градиента концентрации.
6. Назовите способы переноса массы в твердых телах и текучих средах.
7. Дайте определение понятиям массоотдача и коэффициент массоотдачи. Перечислите методы определения коэффициента массоотдачи.
8. Изобразите график изменения концентрации при массопередаче.
9. Напишите закон Фика и дайте определение входящих в него величин.
10. Назовите физический смысл коэффициента диффузии и его размерность.
11. Назовите механизмы переноса массы в твердых телах и текучих средах.
12. Напишите формулу расчета потока массы при конвективном массообмене.
13. Укажите аналогию теплопроводности и молекулярной концентрационной диффузии.

## ГЛАВА 3. КЛАССИФИКАЦИЯ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОМАССОБМЕНА

### § 3.1. Классификация задач тепломассообмена

Классификация позволяет на стадии постановки задачи расчета тепломассообмена выявить основные признаки процесса переноса теплоты или массы и использовать математический аппарат, который необходим для решения данной конкретной задачи. Поэтому классификация является начальным элементом любого научного или инженерного исследования, включая и расчет тепломассообмена.

Задачи тепломассообмена можно объединить в разные группы в зависимости от критерия анализа.

**Во-первых**, трудоемкость решения задачи зависит от *размерности* задачи. Различают нуль-, одно-, дву- или трехмерные постановки задачи. При постановке задачи необходимо учитывать и *систему координат* (декартова, цилиндрическая или сферическая система), в которой записывают уравнения тепломассообмена.

**Во-вторых**, все задачи тепломассообмена можно разделить на *стационарные* и *нестационарные* в зависимости от того, изменяются или нет поля температур и поля концентраций во времени.

**В-третьих**, задачи тепломассообмена подразделяют на *линейные* и *нелинейные*. В *нелинейных* задачах тепломассообмена учитывают зависимость физических свойств вещества (плотности, теплоемкости, коэффициентов теплопроводности и температуропроводности) от температуры и коэффициентов диффузии от концентрации. В *нелинейных* задачах ТМО также учитывают и нелинейный характер условий тепломассообмена на границе тела и нелинейность начальных условий.

Точность решения нелинейных задач значительно выше, чем линейных, однако при этом существенно возрастает и сложность реализации алгоритма решения.

**В-четвертых**, задачи тепломассообмена подразделяют на задачи *внутреннего ТМО*, или *внутренние* задачи, задачи *внешнего ТМО*, или *внешние* задачи и задачи *сопряженного ТМО*, или *сопряженные* задачи.

*Внутренними* задачами теплообмена называют задачи расчета температурных полей и потоков теплоты в твердых телах, формируемых в процессе теплопроводности. При этом условия теплообмена на границах твердого тела известны.

Аналогично *внутренними* задачами массообмена называют задачи расчета полей концентрации и потоков массы в твердых телах, формируемых в процессе молекулярной диффузии. При этом условия массообмена на границах твердого тела известны.

*Внешними* задачами теплообмена называют задачи расчета температурных полей и потоков теплоты в текучей среде, окружающей твердое тело, в процессе конвективного или лучисто-конвективного теплообмена. При этом условия теплообмена на границах области, занимаемой флюидом, известны.

Аналогично *внешними* задачами массообмена называют задачи расчета полей концентрации и потоков массы в текучей среде, окружающей твердое тело, в процессе молекулярной или конвективной диффузии. При этом условия массообмена на границах области, занимаемой флюидом, известны.

Деление задач тепломассообмена на *внешние* и *внутренние* – условная операция, которую выполняют в целях упрощения решения *сопряженной* задачи тепломассообмена. При решении сопряженной задачи тепломассообмена учитывают взаимное влияние внутреннего и внешнего

переноса теплоты и массы путем согласования условий тепломассообмена на границе раздела фаз.

К *сопряженным* задачам относят и задачи, учитывающие взаимное влияние процессов переноса теплоты и массы. При наличии в смеси градиентов температуры происходит разделение компонентов смеси по молекулярной массе – возникает термодиффузия (эффект Соре). При наличии массообмена вследствие различия теплоемкостей компонентов смеси возникает диффузионный тепловой поток (эффект Дюфура).

К *сопряженным* задачам тепломассообмена также относят задачи расчета *совместного* протекания тепломассообмена и процессов другой физической (механической, электромагнитной, ядерной), химической или биологической природы. Например, взаимное влияние температурных и электромагнитных полей при индукционном нагреве или взаимное влияние температурного поля и поля упругих или пластических деформаций, возникающих при нагреве (охлаждении) или при механическом воздействии на твердое тело. Такого рода сопряженные задачи также называют *совместными* задачами.

**В-пятых**, задачи тепломассообмена подразделяют на *прямые* и *обратные* в зависимости от заданных (входных) и искомого (выходных) параметров.

В *прямых* задачах по заданным условиям однозначности (размерам тела, времени процесса, теплофизическим или диффузионным свойствам, начальному распределению температуры или концентрации, коэффициентам теплоотдачи или массоотдачи на границе данной области) рассчитывают поле температур или поле концентраций и соответственно потоки теплоты или потоки массы.

В *обратных* задачах тепломассообмена по известному из эксперимента температурному полю или полю

концентраций определяют (восстанавливают) одно из условий однозначности.

Особое место в классификации задач теплообмена занимают задачи расчета радиационного (лучистого) теплообмена (РТО). Существует два способа математического описания и решения задач радиационного теплообмена – дифференциальный (поточковый) и интегральный (балансовый). При дифференциальном способе описания переноса лучистой энергии классификация задач РТО аналогична классификации задач кондуктивного и конвективного переноса теплоты. Интегральный метод расчета радиационного теплообмена основан на разбиении всех тел (твердых и газообразных) на конечные поверхностные участки и конечные объемы – поверхностные и объемные зоны, поэтому этот метод также называют *зональным методом* расчета радиационного теплообмена.

Дифференциальный метод расчета радиационного теплообмена используют в современных программных вычислительных комплексах. Зональный метод расчета РТО применяют при численном моделировании на компьютере и при выполнении «ручных» расчетов на калькуляторе. В зональном методе задачи *радиационного* теплообмена в системе твердых тел и газовых объемах, в зависимости от входных и выходных параметров, подразделяют на *прямые, обратные* и *смешанные*.

В *прямых* зональных задачах радиационного теплообмена заданными (входными) параметрами считают температуры твердых поверхностей и газовых объемов, а искомыми (выходными) параметрами – тепловыделения в газовых объемах и результирующие тепловые потоки на твердых поверхностях.

В *обратных* зональных задачах радиационного теплообмена, наоборот, заданными (входными) параметрами считают тепловыделения в газовых объемах и

результатирующие тепловые потоки на твердых поверхностях, а искомыми (выходными) параметрами – температуры твердых поверхностей и газовых объемов.

В *смешанных* зональных задачах радиационного теплообмена для одних газовых объемов и твердых поверхностей входными параметрами являются температуры, а выходными – тепловыделения и результирующие тепловые потоки; для других газовых объемов и твердых поверхностей, наоборот, заданы тепловыделения или результирующие тепловые потоки, а требуется найти температуры.

Существует также постановка задачи расчета *радиационного* теплообмена зональным методом, при которой в газовых объемах задана *функциональная зависимость* между тепловыделениями и температурами объемных зон, а для поверхностных зон задана *функциональная зависимость* между результирующими тепловыми потоками и температурами. При такой *неявнозаданной* постановке задачи расчета радиационного теплообмена величину тепловыделения и температуру газовых объемов, результирующие тепловые потоки и температуру, ограничивающих объем поверхностей, находят методом итераций.

В *неявнозаданной* постановке задачи можно решить задачу не только чисто радиационного теплообмена, но и задачу *внешнего радиационно-конвективного* теплообмена.

## **§ 3.2. Методы решения задач тепломассообмена**

### **§ 3.2.1. Понятие модели физического процесса**

Изучение процессов любой физической природы заключается в установлении качественной и количественной связи между параметрами, характеризующими данное явление (процесс). Процесс переноса теплоты в пространстве и

времени количественно описывают при помощи температурного поля  $T(x_i, \tau)$  и тепловых потоков  $\vec{Q}(x_i, \tau)$ , а перенос массы компонентов смеси – полем концентраций  $C_i(x_j, \tau)$  или  $\rho_i(x_j, \tau)$  и потоками массы компонентов смеси  $\vec{m}_i(x_j, \tau)$ . Поэтому решение задачи ТМО заключается в определении перечисленных параметров:

- $T(x_i, \tau)$  и  $\vec{Q}(x_i, \tau)$  при теплообмене;
- $C_i(x_j, \tau)$  или  $\rho_i(x_j, \tau)$  и  $\vec{m}_i(x_j, \tau)$  при массообмене.

Для установления функциональной связи между параметрами, характеризующими перенос теплоты и массы, необходимо построить *модель* тепло- и массообмена. В самом общем случае под *моделью* понимают некий объект, который используют для воспроизведения и изучения свойств какого-либо процесса или явления. Можно выделить два класса моделей:

- а) мысленные (нематериальные) модели;
- б) физические (материальные) модели или, как говорят инженеры, модели «в железе».

Поэтому все методы решения задач ТМО можно разделить на две большие группы. К *первой* группе относят методы, использующие мысленные (нематериальные) модели и поэтому их называют *теоретическими* методами. Во *вторую* группу входят методы, при использовании которых температурное поле, поле концентраций и потоки теплоты и массы находят в результате проведения эксперимента на физических (материальных) моделях или на действующих промышленных теплообменных аппаратах. И поэтому такие методы получения информации называют *экспериментальными* методами.

Главная цель разработки любой модели (и материальной, и мысленной) заключается в том, чтобы модель достоверно (адекватно) воспроизводила процесс ТМО.

### § 3.2.2. Теоретические методы решения задач теплообмена

Мысленные (нематериальные) модели можно подразделить на две группы: *концептуальные* модели и *математические* модели.

*Концептуальные модели* – это модели, которые описывают процесс и объект моделирования словами на уровне *качественных* представлений. Например, теплоноситель нагревается или охлаждается, тепловой поток увеличивается или уменьшается, теплота поглощается или выделяется в объекте исследования с известными размерами и длительностью процесса.

*Математические модели* – это модели, которые описывают процесс и объект моделирования при помощи математического описания в виде формулы, уравнения, системы алгебраических, дифференциальных, интегральных или интегро-дифференциальных уравнений. Математическую модель процесса теплообмена разрабатывают на основе концептуальной модели этого процесса, поэтому неверное представление о механизме переноса теплоты и массы в данном конкретном теплообменном аппарате может привести к фатальным ошибкам в математическом описании процесса.

#### § 3.2.2.1. Математическое описание теплообмена

Математическое описание процессов теплообмена можно условно разделить на *три* группы. К *первой* группе относят дифференциальные уравнения переноса теплоты и массы, которые выведены на основе закона сохранения тепловой энергии и закона сохранения массы для элементарного объема пространства  $dV$  за бесконечно

малое время  $dt$ . Дифференциальные уравнения теплопроводности и конвективного теплообмена рассмотрены во второй части учебника. Для расчета радиационного теплообмена использован интегральный метод, поэтому рассмотрение дифференциального уравнения переноса лучистой энергии в учебнике не приведено. Дифференциальные уравнения диффузии в твердых телах и конвективной диффузии (конвективного массообмена) приведены в четвертой части книги.

Ко *второй* группе математического описания процессов ТМО относят законы переноса теплоты и массы. Законы переноса устанавливают функциональную связь между параметром, характеризующим данное явление, и потоком субстанции в переменном поле этого параметра. При теплообмене это основной закон теплопроводности Фурье, который устанавливает связь температурного поля и теплового потока, а при массообмене – это закон переноса массы Фика, устанавливающий связь концентрации  $i$ -го компонента смеси с потоком массы этого компонента.

*Третью* группу математического описания процессов ТМО составляют линейные и нелинейные алгебраические уравнения, которые также устанавливают функциональную зависимость параметра (температуры или концентрации) и потока субстанции (теплового потока или потока массы) в заданной расчетной области и на ее пространственных и временных границах. Алгебраические соотношения для расчета параметров ТМО получают в результате обработки опытных данных или решением *краевых* задач теории тепломассообмена.

К *третьей* группе математического описания также относят классические *зональные* методы расчета лучистого теплообмена, использующие функциональные зависимости между зональными температурами и результирующими тепловыми потоками в виде алгебраических уравнений,

которые получены на основе лучевой алгебры, разработанной советским ученым Г.Л. Поляком.

### ***Дифференциальные уравнения переноса теплоты и массы***

Для изучения методов решения уравнений *первой* группы математического описания рассмотрим структуру и содержание дифференциальных уравнений переноса теплоты и массы.

### ***Дифференциальное уравнение переноса теплоты***

Дифференциальное уравнение переноса теплоты в сплошной среде представляет собой баланс тепловой внутренней энергии в элементарном объеме  $dV$  за время  $dt$  в процессе теплообмена кондукцией (теплопроводностью), конвекцией и излучением (см. рис. 3.1).

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Изменение} \\ \text{тепловой} \\ \text{энергии в} \\ \text{объеме } dV \text{ за} \\ \text{время } dt, [\text{Дж}] \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{Прибыль или убыль} \\ \text{теплоты кондукцией,} \\ \text{конвекцией и} \\ \text{излучением в объеме} \\ dV \text{ за время } dt, [\text{Дж}] \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{Источник или} \\ \text{сток теплоты в} \\ \text{объеме } dV \text{ за} \\ \text{время } dt, [\text{Дж}] \end{array} \right]$$

Рис. 3.1. Баланс тепловой энергии в элементарном объеме  $dV$  за время  $dt$

Тепловой баланс аналитически записывают в виде:

$$d^2Q_\tau = d^2Q_{\tau, \text{конд}} + d^2Q_{\tau, \text{конв}} + d^2Q_{\tau, \text{изл}} + d^2Q_{\tau, \text{ист}}, \quad (3.1)$$

где  $d^2Q_\tau$  – изменение теплоты (внутренней энергии или энтальпии) в  $dV$  за  $dt$ , Дж;  $d^2Q_{\tau, \text{конд}}$  – поступление или уход

теплоты кондукцией (теплопроводностью) в твердых телах (w) или в текучих средах (f) в  $dV$  за  $dt$ , Дж;  $d^2Q_{\tau, \text{конв}}$  – поступление или уход теплоты конвекцией в текучих средах в  $dV$  за  $dt$ , Дж;  $d^2Q_{\tau, \text{изл}}$  – поступление или уход теплоты излучением в  $dV$  за  $dt$ , Дж;  $d^2Q_{\tau, \text{ист}}$  – поступление или уход теплоты за счет действия внутренних источников или стоков теплоты в  $dV$  за  $dt$ , Дж.

В зависимости от вида сплошной среды уравнение (3.1) принимает вид:

– твердые тела

$$d^2Q_{\tau} = d^2Q_{\tau, \text{конд}(w)} + d^2Q_{\tau, \text{ист}}; \quad (3.2)$$

– текучие лученепрозрачные среды

$$d^2Q_{\tau} = d^2Q_{\tau, \text{конд}(f)} + d^2Q_{\tau, \text{конв}} + d^2Q_{\tau, \text{ист}}; \quad (3.3)$$

– текучие излучающие среды

$$d^2Q_{\tau} = d^2Q_{\tau, \text{конд}(f)} + d^2Q_{\tau, \text{конв}} + d^2Q_{\tau, \text{изл}} + d^2Q_{\tau, \text{ист}}; \quad (3.4)$$

– неподвижные газовые излучающие среды

$$d^2Q_{\tau} = d^2Q_{\tau, \text{изл}} + d^2Q_{\tau, \text{ист}}; \quad (3.5)$$

где  $d^2Q_{\tau, \text{конд}(w)}$  – поступление или уход теплоты кондукцией (теплопроводностью) в *твердых* телах в  $dV$  за  $dt$ , Дж;  $d^2Q_{\tau, \text{конд}(f)}$  – поступление или уход теплоты кондукцией (теплопроводностью) в *текучих* средах в  $dV$  за  $dt$ , Дж;  $d^2Q_{\tau, \text{конв}}$  – поступление или уход теплоты конвекцией в текучих средах в  $dV$  за  $dt$ , Дж.

Сумма  $d^2Q_{\tau, \text{конд}(f)} + d^2Q_{\tau, \text{конв}} = d^2Q_{\tau, \text{кто}}$  представляет

собой поступление или уход теплоты за счет *конвективного теплообмена* в  $dV$  за  $d\tau$ , Дж.

Изменение теплоты в элементарном объеме сплошной среды в  $dV$  за промежуток времени  $d\tau$  рассчитывают по калориметрической формуле:

– для изобарных процессов

$$d^2Q_\tau = c_p \cdot dM \cdot dT = c_p \cdot \rho dV \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} dV d\tau; \quad (3.6)$$

– для изохорных процессов

$$d^2Q_\tau = c_v \cdot dM \cdot dT = c_v \cdot \rho dV \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial \tau} dV d\tau, \quad (3.7)$$

где  $c_p$  – удельная массовая изобарная теплоемкость, Дж/(кг·К);  $c_v$  – удельная массовая изохорная теплоемкость, Дж/(кг·К);  $dM = \rho dV$  – масса элементарного объема  $dV$ , кг;  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $dT = \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau$  – изменение температуры элементарного объема  $dV$  за время  $d\tau$ .

**Замечание.** У твердых тел и капельных жидкостей, незначительно изменяющих свой объем при нагреве и охлаждении, удельные теплоемкости практически не зависят от вида процесса ( $c_v \approx c_p = c$ ). Поэтому изменения теплоты в изохорных и изобарных процессах принимают равными при выполнении инженерных расчетов.

Расчет слагаемых в правой части уравнений (3.1) – (3.5) рассмотрен во второй части учебника.

### *Дифференциальное уравнение переноса массы*

Дифференциальное уравнение переноса массы  $i$  - того

компонента вещества в сплошной среде представляет собой баланс массы данного компонента в элементарном объеме  $dV$  за время  $dt$  в процессе массообмена диффузией и конвекцией (см. рис. 3.2).

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Изменение} \\ \text{массы } i\text{-го} \\ \text{компонента} \\ \text{вещества в} \\ \text{объеме } dV \text{ за} \\ \text{время } dt, [\text{кг}] \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{Прибыль/убыль} \\ \text{массы } i\text{-го} \\ \text{компонента} \\ \text{вещества} \\ \text{диффузией и} \\ \text{конвекцией в} \\ \text{объеме } dV \text{ за} \\ \text{время } dt, [\text{кг}] \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{Источник/сток} \\ \text{массы } i\text{-го} \\ \text{компонента} \\ \text{вещества в объеме} \\ dV \text{ за время } dt, [\text{кг}] \end{array} \right]$$

Рис. 3.2. Баланс массы  $i$ -го компонента вещества в элементарном объеме  $dV$  за время  $dt$

Материальный баланс  $i$ -го компонента смеси аналитически записывают в виде:

$$d^2M_i = d^2M_{i,\text{дифф}} + d^2M_{i,\text{конв}} + d^2M_{i,\text{ист}}, \quad (3.8)$$

где  $d^2M_i$  – изменение массы  $i$ -го компонента вещества в  $dV$  за время  $dt$ , кг;  $d^2M_{i,\text{дифф}}$  – поступление или уход массы  $i$ -го компонента вещества молекулярной диффузией в твердых телах ( $w$ ) или в текучих средах ( $f$ ) в  $dV$  за  $dt$ , кг;  $d^2M_{i,\text{конв}}$  – поступление или уход массы  $i$ -го компонента вещества конвекцией в текучих средах в  $dV$  за  $dt$ , кг;  $d^2M_{i,\text{ист}}$  – поступление или уменьшение массы  $i$ -го компонента вещества в результате различных превращений в  $dV$  за  $dt$ , кг.

В зависимости от вида сплошной среды уравнение (3.8) принимает вид:

– твердые тела

$$d^2M_i = d^2M_{i,\text{дифф}(w)} + d^2M_{i,\text{ист}}; \quad (3.9)$$

– текущие среды (капельная жидкость или газ)

$$d^2M_i = d^2M_{i,\text{дифф}(f)} + d^2M_{i,\text{конв}} + d^2M_{i,\text{ист}}, \quad (3.10)$$

где  $d^2M_{i,\text{дифф}(w)}$  – поступление или уход массы  $i$ -го компонента вещества молекулярной диффузией в твердых телах в  $dV$  за  $d\tau$ , кг;  $d^2M_{i,\text{дифф}(f)}$  – поступление или уход массы  $i$ -го компонента вещества молекулярной диффузией в текучих средах в  $dV$  за  $d\tau$ , кг;  $d^2M_{i,\text{ист}}$  – источник или сток массы в сплошной многокомпонентной среде в  $dV$  за  $d\tau$ , кг.

Аналогично записи переноса теплоты конвективным теплообменом сумма  $d^2M_{i,\text{дифф}(f)} + d^2M_{i,\text{конв}} = d^2M_{i,\text{кмо}}$  представляет собой поступление или уход теплоты за счет конвективного массообмена (конвективной диффузии) в  $dV$  за  $d\tau$ , кг.

Расчет слагаемых в правой части уравнений (3.9) – (3.10) рассмотрен в четвертой части учебника.

### ***Дифференциальное уравнение переноса импульса***

Для расчета конвективного тепломассообмена необходима информация о распределении скорости текучей среды в пространстве и времени  $\vec{w}(x_i, \tau)$ . Поле скорости  $\vec{w}(x_i, \tau)$  находят решением дифференциального уравнения движения среды Навье-Стокса совместно с дифференциальным уравнением неразрывности (сплошности) среды. Дифференциальное уравнение движения получено на основе второго закона Ньютона для импульса  $I = m\vec{w}$  в текучих средах и в векторной форме для энергетических аппаратов имеет вид:

$$\frac{\partial(M\bar{w})}{\partial\tau} = \bar{f}_{\text{ин}} + \bar{f}_{\text{г}} + \bar{f}_{\text{р}} + \bar{f}_{\text{тр}}, \quad (3.11)$$

где  $M$  – масса элементарного объема, кг;  $\bar{f}_{\text{ин}}$  – сила инерции, Н;  $\bar{f}_{\text{г}}$  – сила тяжести (объемная сила поля земного тяготения), Н;  $\bar{f}_{\text{р}}$  – сила давления, Н;  $\bar{f}_{\text{тр}}$  – сила трения, Н.

### § 3.2.2.2. Условия однозначности для решения дифференциальных уравнений переноса

Математические модели *первой* и *второй* группы математического описания, основанные на дифференциальных уравнениях в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнениях, имеют множество решений. Для выделения единственного решения дифференциального уравнения необходимо задать дополнительные условия, которые называют условиями однозначности (УО). Условия однозначности включают в себя информацию о границах области расчета в пространстве и времени, о физических свойствах тел, о наличии внутренних источников (стоков) теплоты и массы. В условия однозначности входят также *краевые условия* (КУ), которые состоят из начального условия (НУ) и граничных условий (ГУ).

Начальное условие определяет распределение искомой функции (температуры, энтальпии или концентрации) в начальный момент расчета в *нестационарных* условиях теплообмена. В *стационарном* режиме переноса теплоты и массы начальное условие задавать не надо, так как это условие не влияет на решение дифференциального уравнения.

Граничные условия формулируют закон теплообмена или закон массообмена на геометрической границе заданной расчетной области с окружающей средой (ОС). Если на

границе расчетной области задано значение искомой функции, то такую задачу в математике называют *задачей Дирихле*, а в теплотехнике граничными условиями *первого рода* (I род). Если на границе расчетной области задано значение производной искомой функции (градиента функции), то такую задачу в математике называют *задачей Неймана*, а в теплотехнике граничными условиями *второго рода* (II род).

Если поток теплоты или массы, поступающий или уходящий с твердой поверхности задан не числом, а в виде функции температуры или концентрации окружающей тело среды, то в этом случае граничные условия в теплотехнике получили название граничных условий *третьего рода* (III род). При граничных условиях III рода тепловой поток или поток массы на границе твердого тела, как правило, моделируют законом теплоотдачи (1.32) или законом массоотдачи в виде (2.24) или в виде (2.25). Заметим, что для расчета потоков теплоты или массы возможно применение функциональной зависимости и другого вида, отличной от закона теплоотдачи Ньютона и закона массоотдачи.

При решении сопряженных задач ТМО равенство потоков теплоты или массы на границе идеального контакта двух сред с разными физическими свойствами (и возможно разного фазового состояния) в теплотехнике называют граничными условиями *четвертого рода* (IV род).

Применительно к условиям решения конкретных задач краевые условия (начальное условие и граничные условия) подробно рассмотрены ниже.

### ***Граничные условия для решения внутренней задачи теплообмена***

Граничные условия III рода описывают широкий спектр практических задач тепломассопереноса, поэтому их наиболее часто применяют в инженерных теплотехнических расчетах. Граничные условия III рода задают при решении *внутренней* задачи теплообмена для расчета

температурного поля и тепловых потоков в процессе нестационарной и стационарной теплопроводности в *твердых* телах.

В качестве примера задания граничных условий III рода рассмотрим теплообмен на границе бесконечной пластины (*w*) с расчетным размером  $R$  при её симметричном нагреве или охлаждении в окружающей текучей среде (*f*) с расчетным размером  $R_0$  (см. рис. 3.3).

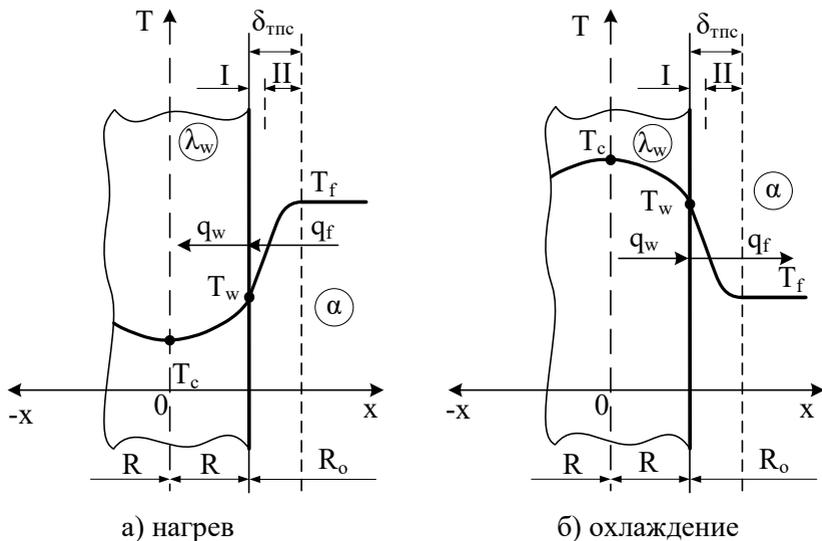


Рис. 3.3. Схема теплообмена на границе твердое тело – текучая среда

На рис. 3.3 схематично (без масштаба) показано изменение температуры в бесконечной пластине при её нагреве (рис. 3.3,а) или охлаждении (рис. 3.3,б) и изменение температуры в текучей среде с температурой  $T_f$  за пределами теплового пограничного слоя (ТПС) толщиной  $\delta_{\text{ТПС}}$ . Внутри теплового пограничного слоя температура флюида

изменяется от  $T_f$  до температуры поверхности пластины  $T_w$ . При этом  $T_f > T_w$  при нагреве твердого тела и, соответственно,  $T_f < T_w$  при его охлаждении.

Следуя закону сохранения энергии, запишем уравнение теплового баланса на внешней границе пластины:

$$q_w = q_f, \quad (3.12)$$

где  $q_w$  – плотность теплового потока, отводимого от наружной границы внутрь твердого тела при нагреве (рис. 3.3,а) или приходящего на поверхность из внутренних слоев тела при его охлаждении (рис. 3.3,б), Вт/м<sup>2</sup>;  $q_f$  – плотность теплового потока, поступающего на наружную поверхность твердого тела из окружающей среды при нагреве (рис. 3.3,а) или отводимого от поверхности тела в окружающую среду при охлаждении (рис. 3.3,б), Вт/м<sup>2</sup>.

Перенос теплоты в твердых телах происходит только теплопроводностью и моделируется законом Фурье. С учетом знака теплового потока и знака градиента температуры закон Фурье для плотности теплового потока в твердом теле принимает вид:

а) нагрев (рис. 3.3,а)

$$-\bar{q}_w = -\lambda_w (+\nabla T) \text{ или } \bar{q}_w = \lambda_w \nabla T; \quad (3.13)$$

б) охлаждение (рис. 3.3,б)

$$+\bar{q}_w = -\lambda_w (-\nabla T) \text{ или } \bar{q}_w = \lambda_w \nabla T, \quad (3.14)$$

где в формуле (3.13) знак *минус* у плотности теплового потока « $-\bar{q}_w$ » показывает, что при нагреве твердого тела тепловой поток направлен *против* оси абсцисс; « $+\nabla T$ » – знак *плюс* показывает, что градиент температуры при нагреве направлен *вдоль* оси абсцисс (против теплового потока); в формуле (3.14) знак *плюс* у плотности теплового потока «

$+\vec{q}_w$  » показывает, что при охлаждении твердого тела тепловой поток направлен *вдоль* оси абсцисс; « $-\nabla T$ » – знак *минус* показывает, что градиент температуры при охлаждении направлен *против* оси абсцисс (против теплового потока);  $\lambda_w$  – коэффициент теплопроводности твердого тела.

**Замечание.** Градиент температурного поля направлен по нормали к изотермическим поверхностям, в качестве которых выступают плоскости параллельные образующим плоскостям бесконечной пластины (см. § 1.1), в сторону увеличения температуры.

Анализ формул (3.13) и (3.14) позволяет сделать вывод о том, что при симметричном нагреве или охлаждении твердых тел любой формы основной закон теплопроводности – закон Фурье следует записывать, опуская знак *минус* в правой части формулы:

$$\vec{q}_w = \lambda_w \nabla T \quad (3.15)$$

или в скалярном виде для тел простой формы

$$q_w = \lambda_w |\nabla T| = \lambda_w \left| \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|, \quad (3.16)$$

где  $|\nabla T| = \left| \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|$  – модуль градиента температуры, К/м;  $x_1$  –

первая координата в ортогональной системе координат (см. § 1.1), которая имеет смысл  $x_1 = x$  для декартовой системы координат и  $x_1 = r$  для цилиндрической и сферической систем координат, м.

Плотность теплового потока  $q_f$ , поступающего на твердое тело из флюида или уходящего с поверхности тела в окружающую текучую среду можно рассчитать двумя способами – по закону теплоотдачи Ньютона или по закону

Фурье в теплопроводной области текучей среды, примыкающей к стенке (область I на рис. 3.3). которая находится внутри теплового пограничного слоя толщиной  $\delta_{\text{тис}}$ .

В инженерных расчетах внешний тепловой поток  $q_f$  находят по закону теплоотдачи Ньютона (1.32):

$$q_f = \alpha \cdot \Delta T = \alpha \cdot |T_f - T_w|, \quad (3.17)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $\Delta T = |T_f - T_w|$  – перепад температур между флюидом и стенкой, °С (К);  $T_f$  – температура текучей среды (флюида) за пределами теплового пограничного слоя, °С (К);  $T_w$  – температура стенки, °С (К).

Тепловой поток, рассчитанный по закону теплоотдачи Ньютона, всегда положителен, потому что коэффициент теплоотдачи  $\alpha > 0$  по определению, а перепад температур берут по модулю или его рассчитывают так, чтобы перепад температур был больше нуля  $\Delta T > 0$ .

Подставляя в формулу теплового баланса (3.12) значения  $q_w$  из формулы (3.16) и  $q_f$  из формулы (3.17) получаем выражение граничных условий III рода в скалярной форме записи:

$$\lambda_w \left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_w = \alpha \cdot |\Delta T|. \quad (3.18)$$

В векторной форме записи с учетом знака градиента температуры ГУ III рода принимают вид:

– нагрев

$$\lambda_w \left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_w = \alpha \cdot (T_f - T_w); \quad (3.19)$$

– охлаждение

$$-\lambda_w \left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_w = \alpha \cdot (T_w - T_f), \quad (3.20)$$

где символ  $|_w$  обозначает внешнюю границу твердого тела; знак *минус* в левой части уравнения (3.20) учитывает, что градиент температуры при охлаждении направлен *против* оси абсцисс (против теплового потока) и в развернутом виде его надо записывать со знаком *минус* ( $-\nabla T = -\partial T / \partial x_1$ ).

Для условий каждой конкретной задачи в зависимости от свойств окружающей среды коэффициент теплоотдачи, входящий в граничные условия III рода равен (см. § 1.6):

$$\alpha = \alpha_k; \quad \alpha = \alpha_k + \alpha_l; \quad \alpha = \alpha_l, \quad (3.21)$$

где  $\alpha_k$  – коэффициент теплоотдачи при конвективном теплообмене стенки с лученепрозрачной текучей средой;  $\alpha_l$  – коэффициент теплоотдачи при лучистом теплообмене стенки с частично поглощающей и излучающей текучей средой.

Чисто лучистая теплоотдача с коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_l$  имеет место при радиационном теплообмене стенки с окружающей средой в виде системы твердых тел, отделенных от стенки лучепрозрачной средой или в вакууме (сильно разреженных газах). При этом коэффициент лучистой теплоотдачи рассчитывают по формуле (1.36).

Граничные условия III рода для чисто радиационного теплообмена можно записать в явном виде без использования коэффициента лучистой теплоотдачи  $\alpha_l$ . В этом случае плотность теплового потока, поступающего на твердое тело из окружающей среды или уходящего в окружающую среду равна:

$$q_f = q_l = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 |T_f^4 - T_w^4| \quad (3.22)$$

и граничные условия III рода записывают в виде

$$\lambda_w |\nabla T|_{\big|_w} = \varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 |T_f^4 - T_w^4|, \quad (3.23)$$

где  $\lambda_w$  – коэффициент теплопроводности твердого тела, Вт/(м·К);  $|\nabla T|$  – модуль градиента температуры около внешней границы твердого тела, К/м;  $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>) – постоянная Стефана–Больцмана;  $T_f$  – температура *окружающей среды* в Кельвинах (К);  $T_w$  – температура поверхности тела в Кельвинах (К);  $\varepsilon_{\text{пр}}$  – приведенная степень черноты в системе тел, участвующих в радиационном теплообмене (см. вторую часть учебника).

### ***Граничные условия для решения внешней задачи теплообмена***

Для решения *внешней* задачи конвективного теплообмена, которая заключается в расчете температурного поля и тепловых потоков в текучей среде омывающей твердое тело, также необходимо задавать граничные условия на твердой поверхности, ограничивающей *текущую* среду и на свободных поверхностях расчетной области через которые флюид входит в эту область и выходит из нее. На рис. 3.3 свободные поверхности расположены перпендикулярно поверхности твердого тела (на рисунке не обозначены). При этом на свободных (не ограниченных твердой стенкой) поверхностях входа и выхода текучей среды в расчетную область конвективного теплообмена должны быть известны температура и скорости потока. На непроницаемых стенках, например, на поверхности твердого тела, являющейся участком границы расчетной области  $R_0$  (см. рис. 3.3), в которой движется текучая среда, скорость равна нулю в силу

условия прилипания.

Для постановки граничных условий на поверхности твердого тела при решении *внешней* задачи теплообмена кратко рассмотрим механизм переноса теплоты в тепловом пограничном слое толщиной  $\delta_{\text{ТПС}}$ , в котором температура флюида изменяется от температуры за пределами пограничного слоя  $T_f$  до температуры стенки  $T_w$ . Тепловой пограничный слой в текучей среде формируется одновременно с гидродинамическим пограничным слоем (ГПС) толщиной  $\delta_{\text{ГПС}}$ , в котором скорость течения флюида изменяется от нуля на стенке  $w_{\text{СТ}} = 0$  (в силу условия прилипания) до скорости за пределами пограничного слоя  $w = w_0$ . Внутренняя структура гидродинамического и теплового пограничных слоев подробно изложена в научной литературе [5, 9-13].

Рассмотрим самую простую двухслойную схему пограничного слоя, согласно которой пограничный слой состоит из вязкого теплопроводного подслоя, примыкающего к стенке (область I на рис. 3.3) и турбулентного ядра (область II на рис. 3.3). В вязком подслое I вблизи стенки скорость течения флюида близка к нулю, поэтому тепловая энергия передается поперек вязкого подслоя (вдоль оси  $Ox$ ) только теплопроводностью и поэтому плотность теплового потока, поступающего на твердую стенку или уходящего от стенки в текучую среду, можно рассчитать по закону Фурье:

$$q_f = \lambda_f \nabla T_f|_w = \lambda_f \left. \frac{\partial T_{f,I}}{\partial x_1} \right|_w, \quad (3.24)$$

где  $\lambda_f$  – коэффициент теплопроводности флюида, Вт/(м·К);

$\nabla T_f|_w = \left. \frac{\partial T_{f,I}}{\partial x_1} \right|_w$  – модуль градиента температуры флюида

на границе с твердым телом в вязком подслое (область I на

рис. 3.3), К/м;  $T_{f,I}$  – температура флюида в вязком подслое, °С (К);  $x_1$  – первая координата в ортогональной системе координат (см. § 1.1.), которая имеет смысл  $x_1 = x$  для декартовой системы координат и  $x_1 = r$  для цилиндрической и сферической систем координат, м; символ  $|_w$  обозначает внешнюю границу твердого тела.

Плотность теплового потока, приходящего в вязкий подслое (в область I на рис. 3.3) из турбулентного ядра пограничного слоя (из области II на рис. 3.3) рассчитывают по формуле:

$$q_f = \lambda_{\text{турб},f} \left. \frac{\partial T_{f,II}}{\partial x_1} \right|_{II}, \quad (3.25)$$

где  $\lambda_{\text{турб},f}$  – турбулентный коэффициент теплопроводности

в турбулентном ядре пограничного слоя, Вт/(м·К);  $\left. \frac{\partial T_{f,II}}{\partial x_1} \right|_{II}$

– градиент температуры флюида в турбулентном ядре теплового пограничного слоя (область II на рис. 3.3), К/м;  $T_{f,II}$  – температура флюида в турбулентном ядре пограничного слоя, °С (К).

Турбулентный коэффициент теплопроводности текучей среды  $\lambda_{\text{турб},f}$  не является физическим параметром флюида, а зависит от режима течения (скорости и уровня турбулентности). Поэтому для расчета  $\lambda_{\text{турб},f}$  разработаны специальные *полуэмпирические* модели турбулентности, в которых для замыкания теоретических моделей турбулентности используют информацию, полученную опытным путем [9, 10]. Подчеркнем ещё раз, что турбулентный коэффициент теплопроводности это *не физический, а расчетный* параметр!

По закону сохранения энергии плотности теплового потока  $q_f$ , рассчитанные по формуле *конвективной* теплоотдачи Ньютона (3.17), по формуле (3.24) для вязкого подслоя и по формуле (3.25) для турбулентного ядра пограничного слоя в *стационарном* режиме теплообмена равны:

$$q_f = \alpha_k \cdot |T_f - T_w| = \lambda_f \left. \frac{\partial T_{f,I}}{\partial x_1} \right|_w = \lambda_{\text{турб},f} \left. \frac{\partial T_{f,II}}{\partial x_1} \right|_{II}, \quad (3.26)$$

где  $\alpha_k$  – коэффициент *конвективной* теплоотдачи, Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $T_f$  – температура текучей среды (флюида) за пределами теплового пограничного слоя, °С (К);  $T_{f,I}$  – температура флюида в вязком подслое, °С (К);  $T_{f,II}$  – температура флюида в турбулентном ядре пограничного слоя, °С (К);  $T_w$  – температура стенки, °С (К);  $\lambda_f$  – коэффициент теплопроводности текучей среды в вязком подслое (физический параметр вещества), Вт/(м·К);  $\lambda_{\text{турб},f}$  – турбулентный коэффициент теплопроводности (режимный параметр флюида), Вт/(м·К).

Рассмотрев физический процесс переноса теплоты в вязком подслое вблизи твердой стенки, сформулируем граничные условия для решения *внешней* задачи теплообмена в виде граничных условий I и II рода. При граничных условиях I рода в области вязкого теплопроводного подслоя *задают* температуру флюида равную температуре стенки, а при граничных условиях II рода *задают* тепловой поток поступающий из твердого тела в текучую среду или уходящий из флюида в твердое тело:

– граничные условия I рода

$$T_{f,I} = T_w; \quad (3.27,a)$$

– граничные условия II рода

$$\lambda_f \left. \frac{\partial T_{f,I}}{\partial x_1} \right|_w = q_w, \quad (3.27,6)$$

где  $T_{f,I}$  – температура текучей среды (флюида) в области вязкого теплопроводного подслоя (область I на рис. 3.3) °C (K);  $T_w$  – температура стенки, °C (K);  $\lambda_f$  – коэффициент теплопроводности текучей среды в вязком подслое, Вт/(м·K);  $\left. \frac{\partial T_{f,I}}{\partial x_1} \right|_w$  – модуль градиента температуры флюида на границе с твердым телом в вязком подслое (область I на рис. 3.3), К/м;  $x_1$  – первая координата в ортогональной системе координат, м;  $q_w$  – тепловой поток, уходящий от твердого тела к флюиду при охлаждении тела или тепловой поток, поступающий из флюида на твердое тело при его нагреве, Вт/м<sup>2</sup>.

При этом закон изменения температуры и теплового потока во времени и на разных участках границы должен быть известен и, в частном случае, оба параметра ( $T_w$  и  $q_w$ ) могут быть постоянными.

### ***Граничные условия для решения сопряженной задачи теплообмена***

При совместном решении внутренней и внешней задач теплообмена необходимо сопрягать (согласовывать) температурные поля в твердом теле и в окружающей его текучей среде. Условие сопряжения записывают в виде равенства температур стенки и флюида в вязком теплопроводном подслое (3.27,а) или в виде равенства тепловых потоков в зоне идеального контакта текучей среды с поверхностью твердого тела:

$$\lambda_w \left. \frac{\partial T_w}{\partial x_1} \right|_w = \lambda_f \left. \frac{\partial T_{f,I}}{\partial x_1} \right|_w, \quad (3.27,в)$$

где  $\lambda_w$  – коэффициент теплопроводности твердого тела, Вт/(м·К);  $\lambda_f$  – коэффициент теплопроводности текучей среды в вязком подслое, Вт/(м·К);  $\left. \frac{\partial T_w}{\partial x_1} \right|_w$  – градиент температуры в *твердом теле* на его внешней границе, К/м;  $\left. \frac{\partial T_{f,I}}{\partial x_1} \right|_w$  – градиент температуры в *текучей среде* на границе с твердым телом (в вязком подслое пограничного слоя), К/м.

Заметим, что при решении сопряженной задачи теплообмена температура стенки  $T_w$  и температура флюида вблизи стенки  $T_{f,I}$  изменяются в ходе расчета.

Граничное условие, которое описывает теплообмен на границе идеального контакта двух тел (в данном случае твердого и текучего), в теплотехнике получило название граничных условий *четвертого* рода (IV род).

### § 3.2.2.3. Методы решения математических моделей теплообмена

В зависимости от вида и структуры математической модели теплообмена для ее решения применяют разные методы. Так, в простых линейных алгебраических моделях расчет неизвестных величин  $T(x_i, \tau)$ ,  $\vec{Q}(x_i, \tau)$  или  $C_i(x_j, \tau)$  и  $\vec{m}_i(x_j, \tau)$  получают подстановкой в формулу математической модели заданных исходных параметров – размеров расчетной области, времени процесса, физических свойств тел, коэффициентов теплообмена и массообмена и т.д.

Например, тепловой поток через непроницаемую стенку можно рассчитать по формуле (1.39) подстановкой заданных коэффициентов внешнего теплообмена (коэффициентов теплоотдачи), коэффициента теплопроводности материала стенки и ее геометрических параметров.

Математические модели, построенные на *нелинейных* алгебраических уравнениях, решают методом последовательных приближений (методом итераций). Нелинейность простой алгебраической модели ТМО обусловлена, как правило, учетом зависимости физических свойств тел от температуры при теплообмене и от концентрации при массообмене, которые изменяются в процессе расчета.

*Краевыми* задачами тепломассообмена называют задачи, построенные на дифференциальном уравнении переноса субстанции с дополнительными условиями – условиями однозначности, которые определяют единственное решение дифференциального уравнения.

Теоретические методы решения *краевой задачи теории тепломассообмена* (КЗТТМ) можно подразделить на *аналитические* (точные и приближенные), *численные* и *численно-аналитические* методы.

При использовании *аналитических* методов решение КЗТТМ получают в виде конечной формулы или бесконечного ряда. *Точные аналитические* методы можно применять только к решению линейных краевых задач теории тепломассообмена.

При использовании *численных методов* решение задачи получают в виде набора значений температур или концентраций в дискретных точках пространства в дискретные моменты времени. В настоящее время для решения задач тепломассообмена численными методами наиболее часто используют *метод сеток* или *метод конечных разностей* (МКР) и *метод конечных элементов* (МКЭ).

*Численно-аналитическими* методами называют гибридные методы, которые используют аналитические решения для получения значений температуры или концентраций в дискретных точках пространства в дискретные моменты времени.

Для математического описания радиационного теплообмена используют дифференциальное уравнение переноса лучистой энергии (потокосовые методы) и интегро-дифференциальное уравнение радиационного теплообмена. Решение дифференциального уравнения переноса лучистой энергии в настоящее время получают численными методами при помощи программно-вычислительных комплексов. Решение интегро-дифференциального уравнения радиационного теплообмена получают *зональными* методами расчета лучистого теплообмена, которые по форме являются *алгебраическими* математическими моделями. Инженерные методы расчета лучистого теплообмена основаны на зональных методах в которых используют, как правило, только одну газовую зону и не более трех поверхностных зон (см. вторую часть учебника).

### **§ 3.2.3. Экспериментальные методы решения задач тепломассообмена**

*Экспериментальные* методы решения теплотехнических задач подразделяют на методы *теории подобия* и методы *аналогии*. По методу теории подобия температурное поле, поле концентраций, тепловые потоки и потоки массы находят экспериментально на модели, в которой реализуется процесс той же физической природы, что и в объекте моделирования (образце). По методу аналогии исследование процесса тепломассообмена заменяют исследованием процесса другой физической природы, который протекает *аналогично* процессу переноса теплоты или массы. Эта

аналогия проявляется в одинаковой по форме записи законов переноса субстанции и в одинаковой по форме записи дифференциальных уравнений переноса, относящихся к разным физическим явлениям.

Математическое моделирование переноса теплоты и массы также основано на аналогии протекания этих процессов.

### § 3.2.3.1. Метод аналогии

Метод аналогии удобно использовать лишь в том случае, если экспериментальное исследование тепломассообмена на материальных моделях, в которых происходит процесс другой физической природы, требует меньших затрат (временных и материальных) на проведение опыта. В теплотехнике для изучения переноса теплоты и массы используют аналогию переноса теплоты и электрического заряда – *электротепловую* аналогию и гидравлическую аналогию переноса теплоты и массы (объема) воды при ее ламинарном течении в трубах и каналах – *гидротепловую* аналогию. Применение метода аналогии в теплотехнике подробно изложено в четвертой части учебника.

Поясним идею метода электротепловой и гидротепловой аналогии.

#### *Электротепловая аналогия*

*Электротепловая* аналогия наблюдается при анализе формулы для расчета теплового потока при теплопередаче через непроницаемую стенку (1.39) и формулировке закона Ома для переноса электрического заряда:

$$Q = \frac{\Delta T}{R_{t,F}}; \quad I = \frac{U}{R_s}, \quad (3.28)$$

где  $Q$  – тепловой поток, Вт;  $I$  – электрический ток, А;  $R_{t,F}$  – термическое сопротивление теплопередачи через стенку площадью  $F$  (см. § 1.7), К/Вт;  $R_3$  – электрическое сопротивление участка цепи, Ом;  $\Delta T = T_{f,1} - T_{f,2}$  – перепад температур между текучими средами, °С (К);  $U$  – разность потенциалов на концах проводника, В.

При *электротепловой* аналогии тепловому потоку  $Q$  соответствует электрический ток  $I$ , перепаду температур  $\Delta T$  – разность потенциалов  $U$ , а термическому сопротивлению  $R_{t,F}$  – электрическое сопротивление  $R_3$ . Для проведения эксперимента по специальной методике строят цепь из электрических сопротивлений, к концам которой подводится разность потенциалов. Изменяя любой из параметров электрической цепи ( $I$ ,  $U$ ,  $R_3$ ), можно при помощи современных приборов измерить два других параметра и соответствующим пересчетом найти их аналоги ( $Q$ ,  $\Delta T$ ,  $R_{t,F}$ ) в тепловой схеме.

Монтаж электрической цепи, изменение ее конфигурации и проведение электрических измерений значительно проще и менее затратно по сравнению с аналогичными операциями на экспериментальных тепловых стендах. Например, при выполнении теплотехнического эксперимента, для того чтобы изменить термическое сопротивление плоской стенки  $R_t = \delta / \lambda$ , необходимо изготовить образцы разного размера из материалов с разным коэффициентом теплопроводности. При выполнении электротехнического эксперимента сопротивление электрической цепи легко можно изменять при помощи переменного электрического сопротивления. Для моделирования нестационарных процессов теплообмена в электрическую цепь включают конденсаторы электрического заряда, моделирующие теплоемкость объекта моделирования. Аналоговые счетно-решающие

устройства, построенные по методу электротепловой аналогии, называют *электроинтеграторами*.

### ***Гидротепловая аналогия***

*Гидротепловая* аналогия наблюдается при анализе формулы для расчета теплового потока при теплопередаче через непроницаемую стенку (1.39) и формулы для расчета объемного расхода воды в трубе:

$$Q = \frac{\Delta T}{R_{t,F}}; \quad \dot{V} = \frac{\Delta H}{R_r}, \quad (3.29)$$

где  $Q$  – тепловой поток, Вт;  $\dot{V}$  – объемный расход воды в трубе, м<sup>3</sup>/с;  $\Delta T = T_{f,1} - T_{f,2}$  – перепад температур между текучими средами, °С (К);  $\Delta H$  – высота столба воды в вертикальных капиллярных трубках с прозрачными стенками, м;  $R_{t,F}$  – термическое сопротивление теплопередачи через стенки площадью  $F$  (см. § 1.7), К/Вт;  $R_r$  – гидравлическое сопротивление, с/м<sup>2</sup>.

Анализ математического описания переноса теплоты и переноса расхода (объема) воды (3.29) полностью подтверждает аналогию этих процессов. При *гидротепловой* аналогии тепловому потоку  $Q$  соответствует объемный расход воды  $\dot{V}$ , перепаду температур  $\Delta T$  – высота столба воды  $\Delta H$ , а термическому сопротивлению  $R_{t,F}$  – гидравлическое сопротивление  $R_r$ .

Аналоговые счетно-решающие устройства, построенные по методу гидротепловой аналогии, называют *гидроинтеграторами*. Гидроинтеграторы широко применялись для решения технических и научных задач до появления электронных цифровых вычислительных машин (ЭЦВМ), прототипов современных компьютеров. В настоящее время *гидротепловую* аналогию не используют для решения задач в науке и технике. Последние «водяные» компьютеры были

сданы в музей в 70-х годах прошлого века. Однако идея решения задач математической физики (механики, теплотехники, ядерной физики) без использования электрической энергии и внешнего воздействия на вычислительный процесс электромагнитных полей различной природы весьма интересна.

### § 3.2.3.2. Метод теории подобия

Впервые механическое подобие установил Исаак Ньютон (1686 г.), заложив основы теории подобия, которую в настоящее время широко применяют при изучении физических явлений. Теория подобия основана на математическом описании физического процесса и позволяет построить материальную *модель* изучаемого объекта (образца) для получения экспериментальной информации об объекте моделирования.

Теория подобия дает правила моделирования и позволяет распространить результаты ограниченного числа экспериментов на группу подобных явлений.

В настоящее время теорию подобия используют при обработке результатов не только физического, но и вычислительного эксперимента, а также при проверке результатов математического моделирования сложных технических устройств.

Для уменьшения числа независимых переменных в теории подобия используют безразмерные *симплексы* и безразмерные *комплексы*, которые называют *критериями* или *числами* подобия.

Симплексы подобия представляют собой отношение двух *однородных* величин. Например, безразмерная координата  $X = \frac{x_1}{R}$  или  $X = \frac{x_1}{R_0}$ , безразмерная скорость  $W = \frac{w}{w_0}$ , где  $x_1$  – первая координата в ортогональной системе

координат, м;  $R$  – геометрический размер расчетной области при решении *внутренней* задачи теплообмена (масштаб длины), м;  $R_0$  – геометрический размер расчетной области при решении *внешней* задачи теплообмена (масштаб длины), м;  $w$  – скорость течения флюида в заданной точке потока, м/с;  $w_0$  – характерная скорость данного потока (масштаб скорости), м/с.

*Критерии (числа подобия)* – это безразмерные комплексы, составленные из разнородных величин, которые характеризуют *отношение* физических эффектов одного типа, например, отношение сил, отношение тепловых потоков, отношение потоков массы, отношение коэффициентов переноса и т.д. Критерии подобия получают, используя дифференциальные уравнения, характеризующие физические процессы, в данном случае это процессы переноса теплоты и массы.

*Замечание.* В 1931 году на съезде союза германских инженеров было принято предложение известного ученого Генриха Гребера (Henryk Gröber) называть числа подобия именами известных ученых и обозначать первыми двумя буквами их фамилии [1].

Все критерии (числа) подобия можно разделить на три группы:

- независимые критерии (симплексы);
- определяемые критерии;
- определяющие критерии.

*Определяемые* критерии находят в результате моделирования или расчетом по известным (ранее полученным) критериальным уравнениям, в которые входят *определяющие* критерии. Величина определяемого критерия (числа подобия) зависит от значения определяющих критериев.

Определяемые и определяющие критерии связаны между собой функциональной зависимостью – *уравнением подобия* или *критериальным уравнением*, которое получают

методами статистической обработки результатов физического или вычислительного (на математической модели) эксперимента. Поэтому критериальные уравнения можно использовать только в тех интервалах определяющих параметров, в которых они были получены.

В общем случае критериальное уравнение подобия можно записать в виде:

$$Kr_0 = f(Kr_t, X_i, Kr_1, Kr_2, Kr_3, \dots), \quad (3.30)$$

где  $Kr_0$  – определяемый критерий (число подобия);  $Kr_t$  – безразмерное время;  $X_i$  – безразмерные координаты;  $Kr_1, Kr_2, Kr_3, \dots$  – определяющие критерии, характеризующие безразмерные эффекты изучаемого физического процесса.

Заметим, что деление на *определяемые* и *определяющие* критерии весьма условно и в зависимости от постановки задачи (прямая или обратная) определяющий критерий может стать определяемым числом подобия.

Существует три способа получения критериев подобия:

- приведением дифференциальных уравнений к безразмерному виду;
- расчетом отношения физических эффектов;
- формальным преобразованием отношения физических эффектов (формальный способ).

При этом конечная формула критерия подобия (числа подобия) не зависит от способа его получения.

Рассмотрим примеры вывода критериев всеми вышеназванными способами при кондуктивном (первый способ), конвективном (второй способ) и радиационном (третий способ) теплообмене *на границе* твердого тела и текучей среды (см. рис. 3.3). Заметим, что все основные критерии подобия для расчета теплообмена и массообмена подробно изложены во второй и четвертой частях учебника по ходу изложения материала.

Получим *определяющий* критерий в теории теплопроводности, применив *первый* способ к уравнению граничных условий III рода (3.18). Для этого выберем масштаб длины равный размеру  $R$  геометрической расчетной области (см. рис. 3.3). Тогда безразмерную и размерную координаты расчетной области находят по формулам:

$$X = \frac{x_1}{R} \Rightarrow x_1 = X \cdot R, \quad (3.31)$$

где  $x_1$  – размерная координата, м;  $X$  – безразмерная координата;  $R$  – размер расчетной области по пространству, м.

Подставляя значение  $x_1$  из (3.31) в формулу (3.18), получим:

$$\lambda_w \left. \frac{\partial T}{\partial (XR)} \right|_w = \alpha \cdot |\Delta T|$$

или

$$\left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_w = \frac{\alpha R}{\lambda_w} \cdot |\Delta T| \Rightarrow \left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_w = Bi \cdot |\Delta T|. \quad (3.32)$$

В правой части уравнения (3.32) безразмерный комплекс  $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda_w}$  представляет собой *определяющий* критерий

подобия в задачах теплопроводности – критерий Био́, который назван в честь французского физика Жан-Батиста Био́. Физический смысл критерия Био́ и безразмерная форма граничных условий III рода рассмотрены во второй части учебника.

*Вторым* способом вывода безразмерных комплексов получим *определяемый* критерий, используемый при решении инженерных задач конвективного теплообмена. Для этого запишем отношение двух форм записи (3.18) и (3.24)

плотности теплового потока  $q_f$  на границе расчетной области конвективного теплообмена  $R_0$ :

$$\frac{q_{f,\alpha}}{q_{f,\lambda_f}} = \frac{\alpha_k \Delta T}{\lambda_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial x_1} \right|_w} \equiv \frac{\alpha_k \Delta T}{\lambda_f \frac{\Delta T}{R_0}} = \frac{\alpha_k}{\left( \frac{\lambda_f}{R_0} \right)} = \frac{\alpha_k R_0}{\lambda_f} = Nu, \quad (3.33)$$

где  $q_{f,\alpha} = \alpha_k \Delta T$  – плотность конвективного теплового потока, рассчитанная по закону теплоотдачи Ньютона;

$q_{f,\lambda_f} = \lambda_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial x_1} \right|_w$  – плотность теплового потока теплопроводностью в вязком подслое теплового пограничного слоя, рассчитанная по закону Фурье; знак  $\equiv$  означает соответствие двух выражений, которые он соединяет (не равенство!). При выводе последней формулы было использовано свойство пропорциональности градиента температурного поля флюида  $\partial T_f / \partial x_1$  отношению  $\Delta T / R_0$ , которые равны с точностью до некоторой постоянной.

В правой части уравнения (3.33) безразмерный комплекс  $Nu = \frac{\alpha_k R_0}{\lambda_f}$  представляет собой *определяемый* критерий подобия (число подобия) в задачах конвективного теплообмена – критерий Нуссельта, названный в честь немецкого теплотехника Вильгельма Нуссельта. Рассчитав по критериальному уравнению Нуссельт ( $Nu$ ), находят коэффициент теплоотдачи по формуле:

$$\alpha_k = Nu \frac{\lambda_f}{R_0},$$

где  $\lambda_f$  – коэффициент теплопроводности флюида;  $R_0$  – определяющий размер расчетной области течения флюида.

Физический смысл критерия Нуссельта рассмотрен во второй части учебника.

### Отличие критериев Био и Нуссельта

Формально математические записи критерия Био  $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda_w}$  и критерия Нуссельта  $Nu = \frac{\alpha_k R_0}{\lambda_f}$  совпадают. Од-

нако можно выделить три принципиальных отличия этих критериев подобия:

– во-первых, критерий Био является *определяющим* критерием в задачах теплопроводности, а критерий Нуссельта является *определяемым* критерием в задачах конвективного теплообмена. Коэффициент теплоотдачи в критерии Био при конвективном теплообмене твердого тела с окружающей средой равен  $\alpha = \alpha_k$ , а при сложном радиационно - конвективном теплообмене  $\alpha = \alpha_k + \alpha_{л}$ . В критерий Нуссельта входит только коэффициент *конвективной* теплоотдачи;

– во-вторых, в критерий Био входит коэффициент теплопроводности твердого тела, а в критерий Нуссельта – коэффициент теплопроводности текучей среды;

– в-третьих, определяющие размеры  $R$  и  $R_0$ , входящие в оба критерия, имеют разный смысл и разное значение, поскольку характеризуют разные расчетные области теплообмена.

По *третьему* формальному способу получения критериев подобия все слагаемые дифференциального уравнения относят к одному из этих слагаемых. Затем в полученных отношениях формально удаляют символы дифференцирования (степени дифференциалов сохраняют), знаки *плюс* и *минус*, символы суммирования, разности параметров заменяют на сами параметры и координаты заменяют на характерный линейный размер расчетной области (текучей среды или твердого тела). Применим третий способ (формальный) для получения *определяющего* критерия при чисто

лучистом теплообмене на границе твердого тела и окружающей среды, который моделируется граничными условиями III рода в виде формулы (3.23). Для этого отнесем правую часть уравнения (3.23) к его левой части и выполним описанную выше формальную процедуру преобразования:

$$\frac{\varepsilon_{\text{пр}} \sigma_0 \left| T_f^4 - T_w^4 \right|}{\lambda_w \left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_w} \Rightarrow \frac{\sigma_0 T^4}{\lambda_w \frac{T}{R}} = \frac{\sigma_0 T^3 R}{\lambda_w} = Sk, \quad (3.34)$$

где  $T$  – характерная температура окружающей среды, К;  $\lambda_w$  – коэффициент теплопроводности твердого тела, Вт/(м·К);  $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>) – постоянная Стефана–Больцмана;  $R$  – характерный размер твердого тела, м.

В правой части формулы (3.34) стоит безразмерный комплекс  $Sk = \frac{\sigma_0 T^3 R}{\lambda_w}$ , который представляет собой *определяющий* критерий подобия в задачах радиационного теплообмена – критерий Старка, названный в честь русского теплотехника-металлурга Бориса Викторовича Старка.

Критерий Старка является аналогом критерия Био и характеризует температурное поле в твердом теле при радиационном обмене с окружающей средой.

### ***Свойства критериев подобия***

При моделировании процессов тепломассообмена часто используют два *свойства критериев* подобия:

– любая комбинация критериев также является критерием, то есть критерии можно перемножать, делить и возводить в степень. Но суммировать и вычитать критерии подобия нельзя!;

– если процесс течения и тепломассообмена не зависит от какого-либо критерия, то этот процесс называют

*автомодельным* (независимым) по отношению к этому критерию. Автомодельности процесса добиваются с целью упрощения моделирования.

### ***Теорема Кирпичева–Гухмана***

Теория подобия базируется на трех положениях теоремы Кирпичева–Гухмана [1 – 6], которые кратко можно сформулировать так:

1. Подобные процессы должны иметь одинаковую физическую природу.

2. В модели и объекте моделирования (образце) должно выполняться подобие *краевых* условий – граничных условий и начального условия при моделировании нестационарных процессов.

3. В модели и объекте моделирования (образце) определяющие критерии должна быть равны. При равенстве *определяющих* критериев равны и *определяемые* критерии (числа подобия).

Применение теории подобия для решения задач кондуктивного и конвективного теплообмена изложено во второй, а для решения задач массообмена – в четвертой частях учебника.

***Замечание.*** Для получения критериев подобия существует способ, который не использует математическое описание конвективного теплообмена в виде дифференциальных уравнений переноса теплоты, массы и импульса. Этот математический прием в теории подобия называют *методом анализа размерностей* [4]. Метод анализа размерностей эффективен в случае возникновения проблем при математическом описании физического явления. При решении задач конвективного тепломассообмена, математическое описание которых подробно разработано, метод анализа размерностей практически не используют. Однако при определении количества независимых критериев подобия для данного конкретного процесса конвективного теплообмена используют, так называемую  $\pi$ -теорему (теорему Бэкингема), являющуюся

основой теории анализа размерностей. Согласно  $\pi$ -теореме количество критериев подобия ( $\pi$ ), входящих в критериальное уравнение вида (3.30), равно  $\pi = n - m$ , где  $n$  – число всех параметров, описывающих конкретный вид конвективного теплообмена, а  $m$  – число первичных (основных) единиц измерения. В теории теплообмена используют основные размерности следующих четырех физических величин – массы [кг], длины [м], времени [с] и температуры [К].

### **Контрольные вопросы по материалам третьей главы**

1. Какова цель классификации задач тепломассообмена?
2. Перечислите критерии анализа при классификации задач тепломассообмена.
3. Дайте характеристику совместных и сопряженных задач тепломассообмена?
4. Почему применяют два способа классификации задач радиационного теплообмена?
5. Дайте определение модели объекта. Какие бывают модели в теплотехнике? Назовите главное свойство любой модели.
6. Назовите методы решения задач ТМО.
8. Дайте определение математической модели тепломассообмена.
9. Перечислите три группы математического описания процессов тепломассообмена.
10. Напишите структуру дифференциального уравнения переноса теплоты.
11. Напишите структуру дифференциального уравнения переноса массы.
12. Напишите общий вид уравнения движения текучей среды.
13. Дайте определение краевых условий теплообмена.
14. Перечислите виды граничных условий при решении теплотехнических задач.
15. Напишите математическую формулировку граничных условий III рода для решения внутренней задачи при конвективной, лучистой и радиационно-конвективной теплоотдаче.

16. Напишите математическую формулировку граничных условий для решения внешней задачи теплообмена.
17. Напишите математическую формулировку граничных условий для решения сопряженной задачи теплообмена.
18. Назовите методы решения математических моделей.
19. Назовите экспериментальные методы решения задач теплообмена.
20. Дайте характеристику метода аналогии.
21. Дайте характеристику метода теории подобия.
22. Дайте определение критерия подобия. Назовите классификацию критериев подобия.
23. Перечислите способы получения критериев подобия.
24. Напишите общий вид критериального уравнения.
25. Назовите отличия критериев Био и Нуссельта.
26. Назовите физический смысл критерия Старка.
27. Назовите свойства критериев подобия.
28. Назовите положения теоремы Кирпичева–Гухмана.
29. Назовите суть  $\pi$ -теоремы метода анализа размерностей.

## ГЛАВА 4. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ЧЕРЕЗ НЕПРОНИЦАЕМЫЕ СТЕНКИ

### § 4.1. Понятие процесса теплопередачи

Теплопередача через непроницаемые стенки, выполненные из материала, не допускающего обмен веществом между двумя средами, которые эта стенка разделяет, при неравномерном температурном поле происходит в три этапа (см. § 1.7). Из окружающей стенку среды с более высокой температурой («горячая» среда) тепловой поток поступает на поверхность стенки. Этот процесс передачи теплоты, который называют *теплоотдачей* (см. § 1.6), в зависимости от вида горячей среды, может происходить конвекцией (конвективным теплообменом), излучением (радиационным теплообменом) и радиационно конвективным теплообменом. Затем теплопроводностью теплота проходит через твердую стенку и с ее поверхности уходит в окружающую стенку среду с меньшей температурой («холодная» среда). Процесс передачи теплоты от стенки к холодной окружающей среде тоже называют *теплоотдачей*, которая может происходить конвективным, радиационным или радиационно-конвективным теплообменом. Заметим, что при расчете теплопередачи один из участков теплоотдачи на стороне высоких или низких температур может отсутствовать.

Если стенка является проницаемой для вещества и через стенку проходит поток массы, то такой процесс одновременного переноса теплоты и массы через *проницаемую* стенку называют *тепломассопередачей*, расчет которой изложен в специальной литературе [22 – 25].

Теплопередача через непроницаемые стенки может происходить в нестационарном и стационарном режимах теплообмена. Если температурное поле в горячей и холодной окружающей средах, которые мы кратко будем

называть флюидами (текучими средами), изменяется во времени, то такую теплопередачу называют *нестационарной*. При этом изменяется во времени и температурное поле твердой стенки. В инженерных расчетах, как правило, рассматривают стационарный процесс теплопередачи при котором температуры флюидов не изменяются во времени, а в непроницаемой стенке температура изменяется только по координате.

Рассмотрим метод расчета теплового потока при теплопередаче через стенки простой (плоской, цилиндрической и сферической) формы при заданных температурах флюидов  $T_{f1}$  и  $T_{f2}$ , известном законе распределения температуры в стенках  $T = f(x_1)$  и заданных коэффициентах теплоотдачи –  $\alpha_1$  со стороны горячего флюида и  $\alpha_2$  со стороны холодного флюида. Расчет теплопередачи выполним в стационарном режиме теплообмена, при котором температурное поле не изменяется во времени, а зависит только от координаты:

$$T \neq f(\tau) \text{ и } T = f(x_1). \quad (4.1)$$

Тепловой поток в стационарном режиме теплопередачи не изменяется во времени и в пространстве:

$$Q \neq f(x_1, \tau) \text{ или } Q = \text{пост.}, \quad (4.2)$$

где  $\tau$  – время, с;  $x_1 = x$  – координата при расчете теплопередачи через плоскую стенку, м;  $x_1 = r$  – координата при расчете теплопередачи через цилиндрическую и сферическую стенки, м.

**Замечание.** В теплообменных аппаратах, работающих в стационарных условиях теплообмена, температура горячего и холодного теплоносителей изменяется вдоль поверхности теплообмена  $T_{f1} = f(F)$  и  $T_{f2} = f(F)$ , где  $F$  – площадь теплопередающей поверхности, м<sup>2</sup>. Однако в каждом сечении теплопередающей

поверхности температуру горячего и холодного флюидов можно считать постоянной.

## § 4.2. Расчет теплоотдачи

Расчет теплоотдачи от горячего флюида к стенке и от стенки к холодному флюиду выполняют по закону теплоотдачи Ньютона (см. § 1.6):

$$Q = \alpha_1(T_{f1} - T_{w1})F_{w1}; \quad (4.3)$$

$$Q = \alpha_2(T_{w2} - T_{f2})F_{w2}, \quad (4.4)$$

где  $\alpha_1$  – коэффициент теплоотдачи от горячего флюида с температурой  $T_{f1}$  к стенке с температурой  $T_{w1}$ , Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $\alpha_2$  – коэффициент теплоотдачи от стенки с температурой  $T_{w2}$  к холодному флюиду с температурой  $T_{f2}$ , Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $F_{w1}$  и  $F_{w2}$  – площади поверхности теплообмена (поверхности стенок) со стороны горячего и холодного флюидов соответственно, м<sup>2</sup>.

Площадь поверхности теплообмена стенок простой формы рассчитывают по формулам:

– плоская стенка прямоугольной формы

$$F_{w1} = F_{w2} = a \cdot b; \quad (4.5)$$

– цилиндрическая стенка

$$F_{w1} = 2\pi r_1 \cdot \ell = \pi d_1 \cdot \ell; \quad F_{w2} = 2\pi r_2 \cdot \ell = \pi d_2 \cdot \ell; \quad (4.6)$$

– сферическая (шаровая) стенка

$$F_{w1} = 4\pi r_1^2 = \pi d_1^2; \quad F_{w2} = 4\pi r_2^2 = \pi d_2^2, \quad (4.7)$$

где  $a$  и  $b$  – линейные размеры плоской стенки прямоугольной формы, м;  $r_1$  и  $r_2$  – внутренний и наружный радиусы

цилиндрической или сферической (шаровой) стенок, м;  
 $d_1$  и  $d_2$  – внутренний и наружный диаметры цилиндрической  
или сферической (шаровой) стенок, м.

### **§ 4.3. Расчет стационарной теплопроводности в стенках простой формы**

Расчет стационарной теплопроводности в стенках простой (плоской, цилиндрической и сферической) формы выполняют для определения одномерного температурного поля  $T = f(x_1)$  и теплового потока  $Q$  через стенку при известных геометрических размерах и заданном значении коэффициента теплопроводности стенок. При выводе формул для расчета температурного поля в стенке  $T = f(x_1)$  и теплового потока через стенку  $Q$  примем допущение о независимости коэффициента теплопроводности материала стенки от температуры ( $\lambda \neq f(T)$  или  $\lambda = \text{const}$ ).

Температурное поле в стенке находят решением дифференциального уравнения теплопроводности с заданными условиями однозначности. Расчет температурного поля в телах простой формы в стационарном и нестационарном режимах будет рассмотрен ниже. При изложении данного раздела учебника закон изменения температуры вдоль координаты  $T = f(x_1)$  будем считать заданным.

#### **§ 4.3.1. Плоская стенка**

Температурное поле в плоской стенке (рис. 4.1) при постоянном коэффициенте теплопроводности подчиняется линейному закону:

$$T(x) = T_{w1} - \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\delta} \cdot x, \quad (4.8)$$

где  $T_{w1}$  и  $T_{w2}$  – температуры на границах стенки, °С (К);  $\delta$  – толщина стенки, м. Заметим, что формула (4.8) справедлива для любого слоя многослойной плоской стенки.

Зная температурное поле, можно рассчитать тепловой поток через плоскую стенку по закону Фурье (1.21), Вт:

$$Q = -\lambda \frac{dT(x)}{dx} F = -\lambda \left( -\frac{T_{w1} - T_{w2}}{\delta} \right) = \frac{\lambda}{\delta} (T_{w1} - T_{w2}) F. \quad (4.9)$$

Плотность теплового потока в этом случае равна, Вт/м<sup>2</sup>:

$$q = \frac{Q}{F} = \frac{\lambda}{\delta} (T_{w1} - T_{w2}), \quad (4.10)$$

где  $\lambda / \delta$  – тепловая проводимость плоской стенки, Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности стенки, Вт/(м·К);  $\delta$  – толщина плоской стенки, м;  $F$  – площадь поверхности теплообмена плоской стенки, м<sup>2</sup>.

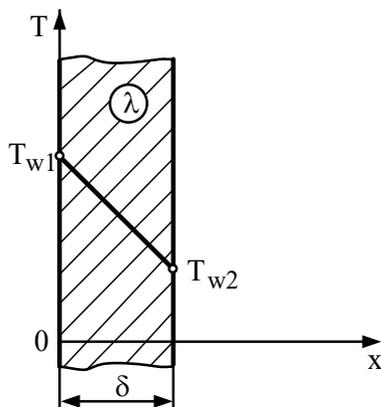


Рис. 4.1. Стационарное температурное поле в плоской стенке

Формулы для расчета теплового потока (4.9) и плотности теплового потока (4.10) можно переписать в виде

$$Q = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\frac{\delta}{\lambda}} \cdot F = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{R_t} \cdot F = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{R_{t,F}}; \quad (4.11)$$

$$q = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\frac{\delta}{\lambda}} = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{R_t}, \quad (4.12)$$

где  $R_t = \delta/\lambda$  – термическое сопротивление теплопроводности плоской стенки,  $(\text{м}^2 \cdot \text{К})/\text{Вт}$ ;  $R_{t,F} = R_t / F$  – термическое сопротивление теплопередачи стенки площадью  $F$ ,  $\text{К}/\text{Вт}$ .

Тепловый поток и, соответственно, плотность теплового потока не изменяются по толщине плоской стенки [ $Q \neq f(x)$  и  $q \neq f(x)$ ] и поэтому для любого  $i$ -го слоя многослойной плоской стенки, состоящей из  $n$  слоев можно записать:

$$q = \frac{\Delta T_1}{R_{t,1}} = \frac{\Delta T_2}{R_{t,2}} = \dots = \frac{\Delta T_i}{R_{t,i}} = \dots = \frac{\Delta T_n}{R_{t,n}} = \text{пост}, \quad (4.13)$$

где  $\Delta T_i$  – перепад температур на  $i$ -м слое многослойной плоской стенки,  $^\circ\text{C}$  ( $\text{К}$ );  $R_{t,i} = \delta_i / \lambda_i$  – термическое сопротивление теплопроводности  $i$ -го слоя многослойной плоской стенки,  $(\text{м}^2 \cdot \text{К})/\text{Вт}$ ;  $\delta_i$  – толщина  $i$ -го слоя,  $\text{м}$ ;  $\lambda_i$  – коэффициент теплопроводности  $i$ -го слоя плоской стенки,  $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ .

Из формулы (4.13) следует, что перепад температур на каждом слое многослойной стенки прямо пропорционален термическому сопротивлению этого слоя:

$$\Delta T_1 : \Delta T_2 : \Delta T_3 : \dots = R_{t,1} : R_{t,2} : R_{t,3} : \dots \quad (4.14)$$

Термическое сопротивление  $R_t$  и плотность теплового потока  $q$  через плоскую стенку, состоящую из  $n$  слоев, рассчитывают по формулам:

$$R_t = \sum_{i=1}^n R_{t,i} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}; \quad (4.15)$$

$$q = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\sum_{i=1}^n R_{t,i}} = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}}. \quad (4.16)$$

### § 4.3.2. Цилиндрическая стенка

Температурное поле в цилиндрической стенке (рис. 4.2) при постоянном коэффициенте теплопроводности подчиняется логарифмическому закону:

$$T(r) = T_{w1} - \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \ln \frac{r}{r_1}, \quad (4.17)$$

где  $T_{w1}$  и  $T_{w2}$  – температуры на границах стенки, °С (К);  $r_1$  – внутренний радиус цилиндрической стенки, м;  $r$  – текущий радиус цилиндрической стенки, м;  $r_2$  – наружный радиус цилиндрической стенки, м.

Тепловой поток, проходящий через цилиндрическую стенку длиной  $\ell$ , найдем по закону Фурье:

$$\begin{aligned} Q &= -\lambda \frac{dT(r)}{dr} F = -\lambda \left( -\frac{T_{w1} - T_{w2}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{1}{r} \right) 2\pi r \ell = \\ &= \lambda \frac{2\pi(T_{w1} - T_{w2})}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ell = \frac{\pi(T_{w1} - T_{w2})}{2\lambda \ln \frac{r_2}{r_1}} \ell = \frac{\pi(T_{w1} - T_{w2})}{2\lambda \ln \frac{d_2}{d_1}} \ell. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Из анализа формулы (4.18) следует, что тепловой поток не изменяется по толщине цилиндрической стенки, потому что  $Q \neq f(r)$ .

В расчетах теплопроводности в цилиндрической стенке используют линейную плотность теплового потока  $q_\ell$ , [Вт/м] – тепловой поток, отнесенный к длине цилиндрической поверхности (см. § 1.3):

$$q_\ell = \frac{Q}{\ell} = \frac{\pi(T_{w1} - T_{w2})}{R_\ell} = \frac{\pi(T_{w1} - T_{w2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}, \quad (4.19)$$

где  $R_\ell = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}$  – линейное термическое сопротивление теплопроводности цилиндрической стенки, (м·К)/Вт.

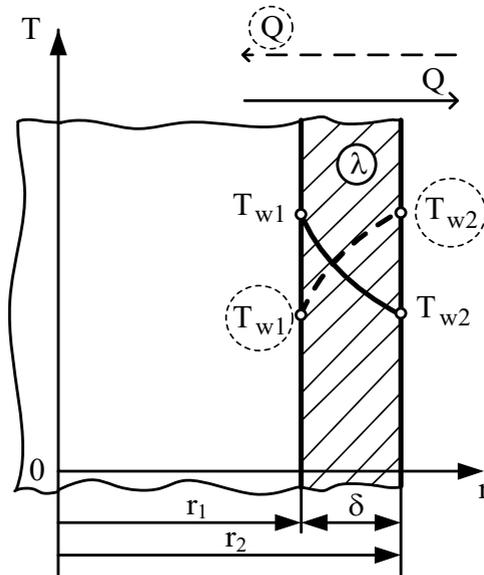


Рис. 4.2. Стационарное температурное поле в цилиндрической стенке

Линейное термическое сопротивление  $R_{\ell,i}$  и линейную плотность теплового потока  $q_\ell$  для любого  $i$ -го слоя многослойной цилиндрической стенки рассчитывают по формулам:

$$R_{\ell,i} = \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} ; \quad (4.20)$$

$$q_\ell = \frac{\pi \Delta T_1}{R_{\ell,1}} = \frac{\pi \Delta T_2}{R_{\ell,2}} = \dots = \frac{\pi \Delta T_i}{R_{\ell,i}} = \dots = \frac{\pi \Delta T_n}{R_{\ell,n}} = \text{пост} , \quad (4.21)$$

где  $\Delta T_i$  – перепад температур на  $i$ -м слое многослойной цилиндрической стенки, °С (К);  $\lambda_i$  – коэффициент теплопроводности  $i$ -го слоя цилиндрической стенки, Вт/(м·К).

Из анализа формулы (4.21) следует, что перепад температур на каждом слое многослойной цилиндрической стенки прямо пропорционален линейному термическому сопротивлению этого слоя:

$$\Delta T_1 : \Delta T_2 : \Delta T_3 : \dots = R_{\ell,1} : R_{\ell,2} : R_{\ell,3} : \dots \quad (4.22)$$

Линейное термическое сопротивление и линейную плотность теплового потока через цилиндрическую стенку, состоящую из  $n$  слоев, рассчитывают по формулам:

$$R_\ell = \sum_{i=1}^n R_{\ell,i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} ; \quad (4.23)$$

$$q_\ell = \frac{\pi \cdot (T_{w1} - T_{w2})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} . \quad (4.24)$$

### § 4.3.3. Шаровая стенка (стенка сферической формы)

Температурное поле в шаровой стенке (рис. 4.3) при постоянном коэффициенте теплопроводности подчиняется гиперболическому закону:

$$T(r) = T_{w1} - \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right), \quad (4.25)$$

где  $T_{w1}$  и  $T_{w2}$  – температуры на границах стенки, °С (К);  $r_1$  – внутренний радиус шаровой стенки, м;  $r$  – текущий радиус цилиндрической стенки, м;  $r_2$  – наружный радиус шаровой стенки, м.

Тепловой поток, проходящий через стенку сферической формы, найдем по закону Фурье:

$$\begin{aligned} Q &= -\lambda \frac{dT(r)}{dr} F = -\lambda \left[ -\frac{T_{w1} - T_{w2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left( \frac{1}{r^2} \right) \right] 4\pi r^2 = \\ &= \lambda \frac{(T_{w1} - T_{w2}) 4\pi}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Используя равенство  $d = 2r$ , формулу (4.26) перепишем в виде:

$$Q = \frac{\lambda \cdot (T_{w1} - T_{w2}) \cdot 2\pi}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} = \frac{\pi(T_{w1} - T_{w2})}{\frac{1}{2\lambda} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right)} = \frac{\pi(T_{w1} - T_{w2})}{R_{ш}}, \quad (4.27)$$

где  $R_{ш} = \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right)$  – термическое сопротивление теплопроводности шаровой стенки, К/Вт.

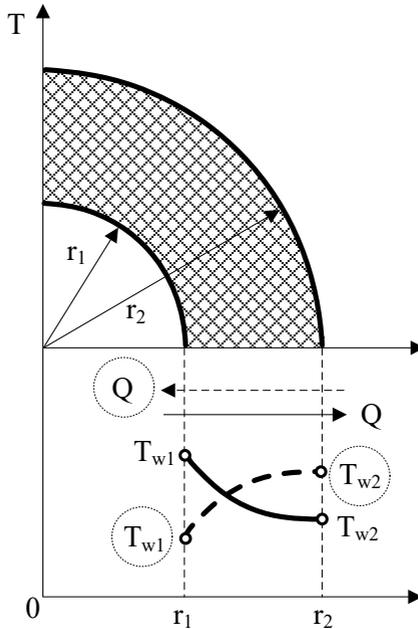


Рис. 4.3. Стационарное температурное поле в шаровой стенке

Термическое сопротивление  $R_{ш,i}$  и тепловой поток  $Q$  для любого  $i$ -го слоя многослойной шаровой стенки рассчитывают по формулам:

$$R_{ш,i} = \frac{1}{2\lambda_i} \cdot \left( \frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}} \right); \quad (4.28)$$

$$Q = \frac{\pi \Delta T_1}{R_{\text{ш},1}} = \frac{\pi \Delta T_2}{R_{\text{ш},2}} = \dots = \frac{\pi \Delta T_i}{R_{\text{ш},i}} = \dots = \frac{\pi \Delta T_n}{R_{\text{ш},n}} = \text{пост}, \quad (4.29)$$

где  $\Delta T_i$  – перепад температур на  $i$ -м слое многослойной шаровой стенки, °С (К);  $\lambda_i$  – коэффициент теплопроводности  $i$ -го слоя шаровой стенки, Вт/(м·К).

Из анализа формулы (4.29) следует, что перепад температур на каждом слое многослойной шаровой стенки прямо пропорционален термическому сопротивлению этого слоя:

$$\Delta T_1 : \Delta T_2 : \Delta T_3 : \dots = R_{\text{ш},1} : R_{\text{ш},2} : R_{\text{ш},3} : \dots \quad (4.30)$$

Термическое сопротивление шаровой стенки, состоящей из  $n$  слоев, равно сумме термических сопротивлений всех слоев, К/Вт

$$R_{\text{ш}} = \sum_{i=1}^n R_{\text{ш},i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \cdot \left( \frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}} \right). \quad (4.31)$$

Тепловой поток  $Q$ , [Вт] через многослойную стенку сферической формы равен:

$$Q = \frac{\pi(T_{w1} - T_{w2})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \cdot \left( \frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}} \right)}. \quad (4.32)$$

#### § 4.4. Расчет теплопередачи через стенки простой формы

Рассмотрим расчет теплопередачи через плоскую, цилиндрическую и шаровую стенки в стационарном режиме теплообмена, при котором тепловой поток на всех участках теплопередачи остается постоянным ( $Q = \text{пост}$ ).

При *прямой* постановке задачи расчета теплопередачи находят тепловой поток, проходящий через непроницаемую

стенку, из окружающей среды с большей температурой («горячей» среды) в окружающую стенку среду с меньшей температурой («холодную» среду) и неизвестные температуры стенки. При этом должны быть заданы температуры горячей и холодной среды ( $T_{f1}$  и  $T_{f2}$ ), коэффициенты теплоотдачи с обеих сторон стенки ( $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ), геометрические размеры стенки и коэффициент теплопроводности материала стенки ( $\lambda$ ).

#### § 4.4.1. Теплопередача через плоскую стенку

Расчет теплопередачи через плоскую стенку удобно выполнять, используя поверхностную плотность теплового потока, которая связана с тепловым потоком соотношением  $q = Q/F$ , где  $F$  – площадь поверхности теплообмена.

Схема теплопередачи через плоскую стенку показана на рис. 4.4. Расчет плотности теплового потока через однослойную плоскую стенку выполняют по формулам:

$$q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = k \cdot (T_{f1} - T_{f2}) = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_t}, \quad (4.33)$$

где  $T_{f1}$  и  $T_{f2}$  – температуры горячего и холодного флюидов, °С (К);  $\alpha_1, \alpha_2$  – коэффициенты теплоотдачи от горячего флюида к стенке и от стенки к холодному флюиду, Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $\delta$  – толщина стенки, м;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности стенки, Вт/(м·К);  $k$  – коэффициент теплопередачи через плоскую стенку, Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $R_t$  – термическое сопротивление теплопередачи через плоскую стенку, (м<sup>2</sup>·К)/Вт.

Из анализа формулы (4.33) следует, что коэффициент теплопередачи  $k$  и термическое сопротивление плоской стенки  $R_t$  рассчитывают по формулам:

$$k = \frac{1}{R_t} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}; \quad (4.34)$$

$$R_t = R_{t,1} + R_{t,2} + R_{t,3} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}, \quad (4.35)$$

где  $R_{t,1} = 1/\alpha_1$  – термическое сопротивление теплоотдачи от горячего флюида к стенке,  $(\text{м}^2 \cdot \text{К})/\text{Вт}$ ;  $R_{t,2} = \delta/\lambda$  – термическое сопротивление теплопроводности плоской стенки,  $(\text{м}^2 \cdot \text{К})/\text{Вт}$ ;  $R_{t,3} = 1/\alpha_2$  – термическое сопротивление теплоотдачи от стенки к холодному теплоносителю,  $(\text{м}^2 \cdot \text{К})/\text{Вт}$ .

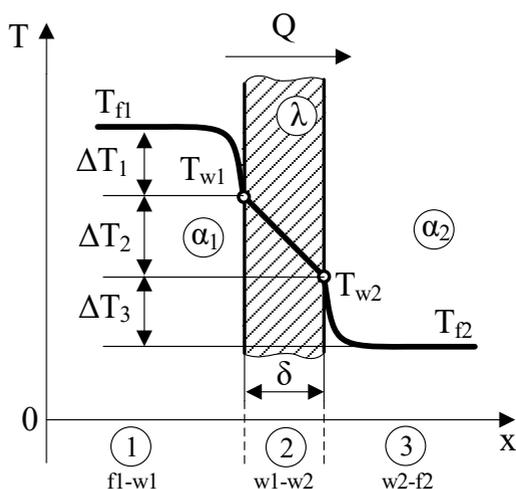


Рис. 4.4. Теплопередача через плоскую стенку

Термическое сопротивление теплопередачи через плоскую стенку равно сумме термических сопротивлений теплоотдачи от горячего флюида к стенке ( $R_{t,1}$ ), теплопроводности плоской стенки ( $R_{t,2}$ ) и теплоотдачи от стенки к холодному флюиду ( $R_{t,3}$ ).

*Замечание.* В расчетах теплопередачи через плоскую стенку термические сопротивления теплоотдачи первого и третьего участков теплообмена также обозначают как  $R_{t,\alpha_1}$  и  $R_{t,\alpha_2}$ , а термическое сопротивление теплопроводности –  $R_{t,\lambda}$ .

Для стенки, состоящей из  $n$  слоев, формула расчета плотности теплового потока при теплопередаче через плоскую стенку имеет вид:

$$q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_t}, \quad (4.36)$$

где  $\delta_i$  – толщина стенки, м;  $\lambda_i$  – коэффициент теплопроводности  $i$ -го слоя стенки, Вт/(м·К);  $R_t$  – термическое сопротивление теплопередачи многослойной стенки, (м<sup>2</sup>·К)/Вт:

$$R_t = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}. \quad (4.37)$$

Формулу (4.36) для расчета плотности теплового потока  $q$  через плоскую стенку перепишем в виде:

$$q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_t} = \frac{\sum_{i=1}^m \Delta T_i}{\sum_{i=1}^m R_{t,i}} = \text{пост}, \quad (4.38)$$

где  $T_{f1} - T_{f2} = \sum_{i=1}^m \Delta T_i$  – перепад температур между флюидами, °C (K);  $\Delta T_i$  – перепад температур на  $i$ -м участке теплопередачи, °C (K);  $R_t = \sum_{i=1}^m R_{t,i}$  – термическое сопротивление теплопередачи плоской стенки, (м<sup>2</sup>·K)/Вт;  $R_{t,i}$  – термическое сопротивление  $i$ -го участка теплопередачи плоской стенки, (м<sup>2</sup>·K)/Вт;  $m$  – число участков теплопередачи.

Максимальное число участков теплопередачи через стенку из  $n$  слоев с учетом двух участков теплоотдачи равно:  $m = n + 2$ .

Из анализа формулы (4.38) следует, что

$$q = \frac{\Delta T_1}{R_{t,1}} = \frac{\Delta T_2}{R_{t,2}} = \dots = \frac{\Delta T_i}{R_{t,i}} = \dots = \frac{\Delta T_m}{R_{t,m}} = \text{пост}. \quad (4.39)$$

Поэтому применяя свойство пропорции запишем:

$$\begin{aligned} \Delta T_1 : \Delta T_2 : \dots : \Delta T_i : \dots : \Delta T_m &= \\ &= R_{t,1} : R_{t,2} : \dots : R_{t,i} : \dots : R_{t,m}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Анализируя формулу (4.40), можно сделать вывод о том, что перепад температур, на любом участке теплопередачи прямо пропорционален термическому сопротивлению данного участка.

Например, для однослойной стенки (см. рис. 4.4) формулы (4.39) и (4.40) принимают вид:

$$q = \frac{\Delta T_1}{R_{t,1}} = \frac{\Delta T_2}{R_{t,2}} = \frac{\Delta T_3}{R_{t,3}} = \text{пост};$$

$$\Delta T_1 : \Delta T_2 : \Delta T_3 = R_{t,1} : R_{t,2} : R_{t,3},$$

где  $\Delta T_1 = T_{f1} - T_{w1}$  – перепад температур на первом участке теплопередачи – на участке теплоотдачи от горячего флюида к стенке;

$\Delta T_2 = T_{w1} - T_{w2}$  – перепад температур на втором участке теплопередачи – на участке теплопроводности;

$\Delta T_3 = T_{w2} - T_{f2}$  – перепад температур на третьем участке теплопередачи – на участке теплоотдачи от стенки к холодному флюиду;

$R_{t,1}, R_{t,2}, R_{t,3}$  – термические сопротивления первого, второго и третьего участков теплопередачи соответственно.

Рассчитав плотность теплового потока по формуле (4.33) для однослойной стенки или по формуле (4.36) для многослойной стенки, приступают к определению неизвестных температур на поверхностях стенки и на границах слоев, если стенка многослойная.

Рассмотрим расчет неизвестных температур на границах однослойной плоской стенки  $T_{w1}$  и  $T_{w2}$ . Алгоритм расчета неизвестных температур на границах слоев многослойной стенки изложен в § 4.4.4.

Для расчета неизвестных температур  $T_{w1}$  и  $T_{w2}$  на границах однослойной стенки (см. рис. 4.4) выбирают участок теплообмена таким образом, чтобы на одной его границе была известная температура, а на другой – искомая. Например, температуру  $T_{w1}$  можно найти двумя способами, поскольку по условию задачи известны две температуры:

а) на участке  $f_1 - w_1$

$$q = \frac{T_{f1} - T_{w1}}{R_{t1}} \Rightarrow T_{w1} = T_{f1} - q \cdot R_{t1}; \quad (4.41)$$

б) на участке  $w_1 - f_2$

$$q = \frac{T_{w1} - T_{f2}}{R_{t2} + R_{t3}} \Rightarrow T_{w1} = T_{f2} + q \cdot (R_{t2} + R_{t3}). \quad (4.42)$$

Естественно, что результаты числового расчета температуры  $T_{w1}$  по обеим формулам совпадают.

Для расчета температуры  $T_{w2}$  можно воспользоваться уже тремя вариантами формулы расчета теплопередачи, поскольку мы знаем уже три температуры – заданные по условию задачи температуры флюидов  $T_{f1}$ ,  $T_{f2}$  и вновь найденную температуру поверхности стенки  $T_{w1}$  :

а) на участке  $f_1 - w_2$

$$q = \frac{T_{f1} - T_{w2}}{R_{t1} + R_{t2}} \Rightarrow T_{w2} = T_{f1} - q \cdot (R_{t1} + R_{t2}); \quad (4.43)$$

б) на участке  $w_1 - w_2$

$$q = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{R_{t2}} \Rightarrow T_{w2} = T_{w1} - q \cdot R_{t2}; \quad (4.44)$$

в) на участке  $w_2 - f_2$

$$q = \frac{T_{w2} - T_{f2}}{R_{t3}} \Rightarrow T_{w2} = T_{f2} + q \cdot R_{t3}. \quad (4.45)$$

Расчет неизвестных температур стенки по разным формулам выполняют для контроля правильности расчета теплопередачи.

В результате решения прямой задачи расчета теплопередачи через плоскую стенку найден тепловой поток (поверхностная плотность теплового потока), проходящий через стенку, и определены неизвестные температуры на границах стенки.

#### § 4.4.2. Теплопередача через цилиндрическую стенку

В расчетах теплопередачи через стенку цилиндрической формы удобно использовать тепловой поток, отнесенный к единице длины цилиндрической стенки – линейную плотность теплового потока:

$$q_\ell = Q / \ell, \quad (4.46)$$

где  $Q$  – тепловой поток, Вт;  $\ell$  – длина цилиндрической стенки, м.

Схема теплопередачи через цилиндрическую стенку приведена на рис. 4.5.

Расчет линейной плотности теплового потока через цилиндрическую стенку выполняют по формулам:

$$\begin{aligned} q_\ell &= \frac{\pi(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot d_2}} = \\ &= k_\ell \pi(T_{f1} - T_{f2}) = \frac{\pi(T_{f1} - T_{f2})}{R_\ell}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

где  $T_{f1}$  и  $T_{f2}$  – температура горячего и холодного флюидов, °С (К);  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  – коэффициенты теплоотдачи от горячего флюида к стенке и от стенки к холодному флюиду, Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $d_1$  и  $d_2$  – внутренний и наружный диаметры цилиндрической стенки, м;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности стенки, Вт/(м·К);  $k_\ell$  – линейный коэффициент теплопередачи через

цилиндрическую стенку, Вт/(м·К);  $R_\ell$  – линейное термическое сопротивление теплопередачи через стенку цилиндрической формы, (м·К)/Вт.

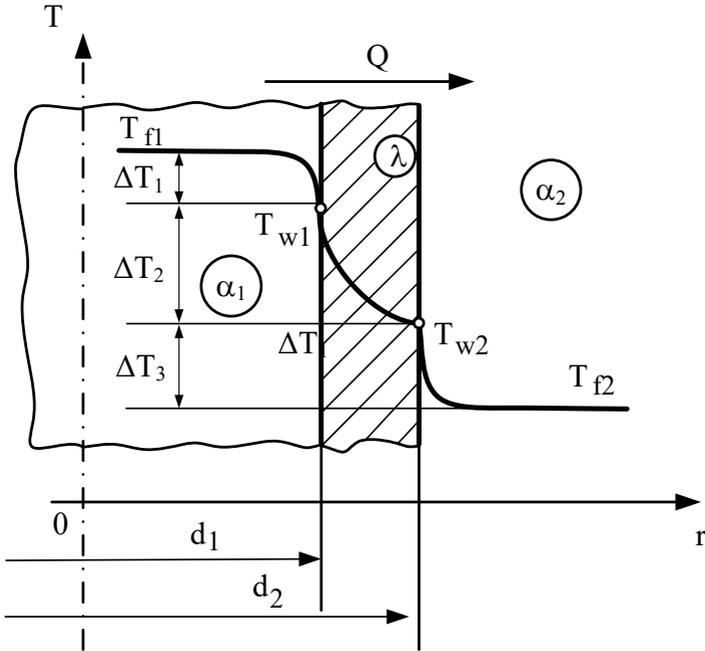


Рис. 4.5. Теплопередача через цилиндрическую стенку

Из анализа формулы (4.47) следует, что линейный коэффициент теплопередачи  $k_\ell$  и линейное термическое сопротивление теплопередачи  $R_\ell$  через цилиндрическую стенку рассчитывают по формулам:

$$k_\ell = \frac{1}{R_\ell} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}; \quad (4.48)$$

$$R_{\ell} = R_{\ell 1} + R_{\ell 2} + R_{\ell 3} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}, \quad (4.49)$$

где  $R_{\ell 1} = 1/(\alpha_1 d_1)$  – линейное термическое сопротивление теплоотдачи от горячего флюида к цилиндрической стенке, (м·К)/Вт;  $R_{\ell 2} = 1/(2\lambda) \cdot \ln(d_2 / d_1)$  – линейное термическое сопротивление теплопроводности цилиндрической стенки, (м·К)/Вт;  $R_{\ell 3} = 1/(\alpha_2 d_2)$  – линейное термическое сопротивление теплоотдачи от цилиндрической стенки к холодному флюиду, (м·К)/Вт.

Линейное термическое сопротивление теплопередачи равно сумме линейных термических сопротивлений теплоотдачи от горячего флюида к цилиндрической стенке ( $R_{\ell 1}$ ), линейного термического сопротивления теплопроводности цилиндрической стенки ( $R_{\ell 2}$ ) и линейного термического сопротивления теплоотдачи от цилиндрической стенки к холодному флюиду ( $R_{\ell 3}$ ).

**Замечание.** В расчетах теплопередачи через цилиндрическую стенку термические сопротивления теплоотдачи первого и третьего участков теплообмена также обозначают как  $R_{\ell, \alpha_1}$  и  $R_{\ell, \alpha_2}$  а термическое сопротивление теплопроводности –  $R_{\ell, \lambda}$ .

Линейную плотность теплового потока при теплопередаче через цилиндрическую стенку, состоящую из  $n$  слоев разной толщины и с разными физическими свойствами, рассчитывают по формуле:

$$q_{\ell} = \frac{\pi(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}} = \frac{\pi(T_{f1} - T_{f2})}{R_{\ell}}, \quad (4.50)$$

где  $\lambda_i$  – коэффициент теплопроводности  $i$ -го слоя, Вт/(м·К);  $d_i$  и  $d_{i+1}$  – внутренний и наружный диаметры  $i$ -го слоя цилиндрической стенки, м;  $R_\ell$  – линейное термическое сопротивление теплопередачи многослойной стенки, (м·К)/Вт:

$$R_\ell = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}. \quad (4.51)$$

Формулу (4.50) для расчета линейной плотности теплового потока  $q_\ell$  через цилиндрическую стенку перепишем в виде:

$$q_\ell = \frac{\pi(T_{f1} - T_{f2})}{R_\ell} = \frac{\sum_{i=1}^m \pi \Delta T_i}{\sum_{i=1}^m R_{\ell,i}} = \text{const}, \quad (4.52)$$

где  $T_{f1} - T_{f2} = \sum_{i=1}^m \Delta T_i$  – перепад температур между флюидами, °С (К);  $\Delta T_i$  – перепад температур на  $i$ -м участке теплопередачи, °С (К);  $R_\ell = \sum_{i=1}^m R_{\ell,i}$  – линейное термическое сопротивление теплопередачи цилиндрической стенки, (м·К)/Вт;  $R_{\ell,i}$  – линейное термическое сопротивление  $i$ -го участка теплопередачи цилиндрической стенки, (м·К)/Вт;  $m$  – число участков теплопередачи.

Максимальное число участков теплопередачи через стенку из  $n$  слоев с учетом двух участков теплоотдачи равно:  $m = n + 2$ .

Анализ формулы (4.52) показывает, что при теплопередаче через цилиндрическую стенку перепады температур на участках теплообмена ( $\Delta T_i$ ) прямо пропорциональны линейным термическим сопротивлениям этих участков ( $R_{\ell,i}$ ), поэтому для многослойной стенки можем записать:

$$\begin{aligned} \Delta T_1 : \Delta T_2 : \dots : \Delta T_i : \dots : \Delta T_m &= \\ &= R_{\ell,1} : R_{\ell,2} : \dots : R_{\ell,i} : \dots : R_{\ell,m}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

где  $m$  – число участков теплопередачи.

Например, для расчета теплопередачи через однослойную цилиндрическую стенку (см. рис. 4.5) выражение (4.53) принимает вид:

$$\Delta T_1 : \Delta T_2 : \Delta T_3 = R_{\ell,1} : R_{\ell,2} : R_{\ell,3}. \quad (4.54)$$

Рассчитав линейную плотность теплового потока по формуле (4.47) для однослойной цилиндрической стенки или по формуле (4.50) для многослойной стенки, приступают к определению неизвестных температур на поверхностях стенки и на границах слоев, если стенка многослойная.

Рассмотрим расчет неизвестных температур на границах однослойной цилиндрической стенки  $T_{w1}$  и  $T_{w2}$ . Алгоритм расчета неизвестных температур на границах слоев многослойной цилиндрической стенки изложен в § 4.4.4.

При теплопередаче через однослойную цилиндрическую стенку (см. рис. 4.5) неизвестными являются температуры на поверхностях стенки  $T_{w1}$  и  $T_{w2}$ . Для расчета неизвестных температур выберем участок теплообмена таким образом, чтобы на одной его границе была известная температура, а на другой – искомая. Например, если для расчета температуры  $T_{w1}$  использовать температуру горячего флюида  $T_{f1}$ , а для расчета температуры  $T_{w2}$  – температуру

холодного флюида  $T_{f2}$ , то в этом случае формулы для расчета искомых температур примут вид:

$$q_{\ell} = \frac{\pi(T_{f1} - T_{w1})}{R_{\ell1}} \Rightarrow T_{w1} = T_{f1} - q_{\ell} \frac{R_{\ell1}}{\pi}; \quad (4.55)$$

$$q_{\ell} = \frac{\pi(T_{w2} - T_{f2})}{R_{\ell3}} \Rightarrow T_{w2} = T_{f2} + q_{\ell} \frac{R_{\ell3}}{\pi}. \quad (4.56)$$

В результате решения прямой задачи расчета теплопередачи через цилиндрическую стенку найден тепловой поток (линейная плотность теплового потока), проходящий через стенку, и определены неизвестные температуры на границах стенки.

### *Упрощенный метод расчета теплопередачи через цилиндрическую стенку*

Для цилиндрических стенок, у которых отношение наружного диаметра  $d_2$  к внутреннему диаметру  $d_1$  меньше двух ( $d_2/d_1 \leq 2$ ), теплопередачу через стенку цилиндрической формы можно рассчитать по формулам теплопередачи через плоскую стенку с погрешностью менее 4 % [5]. При таком отношении диаметров функцию  $\ln(d_2/d_1)$ , входящую в формулу для расчета термического сопротивления теплопроводности цилиндрической стенки (4.20), можно разложить в ряд:

$$\ln \frac{d_2}{d_1} = \left( \frac{d_2}{d_1} - 1 \right) - \frac{\left( \frac{d_2}{d_1} - 1 \right)^2}{2} + \frac{\left( \frac{d_2}{d_1} - 1 \right)^3}{3} - \frac{\left( \frac{d_2}{d_1} - 1 \right)^4}{4} \dots$$

Учитывая в расчетах только первый член ряда, получим:

$$\ln \frac{d_2}{d_1} = \frac{d_2}{d_1} - 1 = \frac{d_2 - d_1}{d_1} = \frac{2 \cdot \delta}{d_1}, \quad (4.57)$$

где  $\delta = (d_2 - d_1) / 2$  – толщина стенки, м.

Подставляя значение  $\ln(d_2 / d_1)$  в формулу расчета линейной плотности теплового потока в процессе *теплопроводности* через цилиндрическую стенку (4.19), получаем:

$$\begin{aligned} q_\ell &= \frac{\pi(T_{w1} - T_{w2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}} = \frac{\pi(T_{w1} - T_{w2})}{\frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{2 \cdot \delta}{d_1}} = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\frac{\delta}{\lambda}} \pi d_1 = \\ &= \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\frac{\delta}{\lambda}} \cdot F_\ell^*, \end{aligned}$$

где  $F_\ell^* = \pi d^*$  – длина окружности цилиндрической стенки, м.

Погрешность упрощенного расчета теплопередачи через цилиндрическую стенку можно уменьшить, если в качестве расчетного диаметра  $d^*$  принимать диаметр со стороны меньшего значения коэффициента теплоотдачи (меньшего из  $\alpha$ ) [5]:

- а) если  $\alpha_2 \ll \alpha_1 \Rightarrow d^* = d_2$ ;
- б) если  $\alpha_1 \ll \alpha_2 \Rightarrow d^* = d_1$ ;
- в) если  $\alpha_1 \approx \alpha_2 \Rightarrow d^* = \frac{d_1 + d_2}{2}$ .

Тепловой поток при теплопередаче через цилиндрическую стенку в этом случае равен:

$$Q = k_\ell \pi \Delta T \ell \approx k \Delta T \pi d^* \ell, \quad (4.58)$$

где  $k_\ell$  – линейный коэффициент теплопередачи через цилиндрическую стенку, рассчитываемый по формуле (4.48),

Вт/(м·К);  $k$  – коэффициент теплопередачи через плоскую стенку, рассчитываемый по формуле (4.34), Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $\Delta T = T_{f1} - T_{f2}$  – перепад температур между горячим и холодным флюидами, °С (К).

### § 4.4.3. Теплопередача через шаровую стенку

Схема теплопередачи через шаровую стенку приведена на рис. 4.6. Расчет теплового потока через шаровую стенку выполняют по формулам:

$$Q = \frac{\pi(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}} = \quad (4.59)$$

$$= k_{ш} \pi (T_{f1} - T_{f2}) = \frac{\pi (T_{f1} - T_{f2})}{R_{ш}},$$

где  $T_{f1}$  и  $T_{f2}$  – температуры горячего и холодного флюидов, °С (К);  $\alpha_1, \alpha_2$  – коэффициенты теплоотдачи от горячего флюида к стенке и от стенки к холодному флюиду, Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $d_1$  и  $d_2$  – внутренний и наружный диаметры шаровой стенки, м;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности шаровой стенки, Вт/(м·К);  $k_{ш}$  – коэффициент теплопередачи через шаровую стенку, Вт/К;  $R_{ш}$  – термическое сопротивление теплопередачи через шаровую стенку, К/Вт.

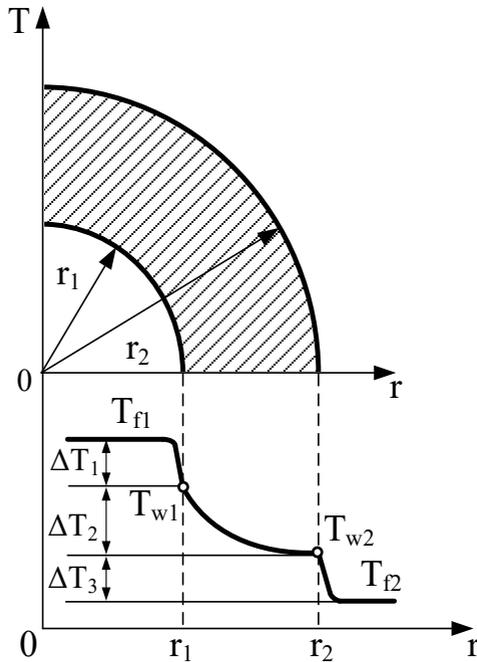


Рис. 4.6. Теплопередача через шаровую стенку

Из анализа формулы (4.59) следует, что коэффициент теплопередачи через шаровую стенку  $k_{ш}$  и термическое сопротивление теплопередачи через шаровую стенку  $R_{ш}$  рассчитывают по формулам:

$$k_{ш} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}}; \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} R_{ш} &= R_{ш,1} + R_{ш,2} + R_{ш,3} = \\ &= \frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}, \end{aligned} \quad (4.61)$$

где  $R_{ш,1} = 1/(\alpha_1 d_1^2)$  – термическое сопротивление теплоотдачи от горячего флюида к шаровой стенке, К/Вт;  $R_{ш,2} = 1/(2\lambda) \cdot (1/d_1 - 1/d_2)$  – термическое сопротивление теплопроводности шаровой стенки, К/Вт;  $R_{ш,3} = 1/(\alpha_2 d_2^2)$  – термическое сопротивление теплоотдачи от шаровой стенки к холодному флюиду, К/Вт.

Термическое сопротивление теплопередачи через шаровую стенку равно сумме термического сопротивления теплоотдачи от горячего флюида к шаровой стенке ( $R_{ш,1}$ ), термического сопротивления теплопроводности шаровой стенки ( $R_{ш,2}$ ) и термического сопротивления теплоотдачи от шаровой стенки к холодному теплоносителю ( $R_{ш,3}$ ).

*Замечание.* В расчетах теплопередачи через шаровую стенку термические сопротивления теплоотдачи первого и третьего участков теплообмена также обозначают как  $R_{ш,\alpha_1}$  и  $R_{ш,\alpha_2}$ , а термическое сопротивление теплопроводности –  $R_{ш,\lambda}$ .

Тепловой поток через шаровую стенку, состоящую из  $n$  слоев разной толщины и с разными физическими свойствами, рассчитывают по формуле:

$$Q = \frac{\pi(T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \left( \frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}^2}} = \frac{\pi(T_{f1} - T_{f2})}{R_{ш}}, \quad (4.62)$$

где  $\lambda_i$  – коэффициент теплопроводности  $i$ -го слоя, Вт/(м·К);  $d_i$  и  $d_{i+1}$  – внутренний и наружный диаметры

$i$ -го слоя шаровой стенки,  $m$ ;  $R_{ш}$  – термическое сопротивление теплопередачи через шаровую стенку, К/Вт:

$$R_{ш} = \frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \left( \frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}^2}. \quad (4.63)$$

Формулу (4.62) для расчета теплового потока  $Q$  через шаровую стенку перепишем в виде:

$$Q = \frac{\pi(T_{f1} - T_{f2})}{R_{ш}} = \frac{\sum_{i=1}^m \pi \Delta T_i}{\sum_{i=1}^m R_{ш,i}} = \text{пост}, \quad (4.64)$$

где  $T_{f1} - T_{f2} = \sum_{i=1}^m \Delta T_i$  – перепад температур между флюидами, °С (К);  $\Delta T_i$  – перепад температур на  $i$ -м участке теплопередачи, °С (К);  $R_{ш} = \sum_{i=1}^m R_{ш,i}$  – термическое сопротивление теплопередачи шаровой стенки, К/Вт;  $R_{ш,i}$  – термическое сопротивление  $i$ -го участка теплопередачи шаровой стенки, К/Вт;  $m$  – число участков теплопередачи.

Максимальное число участков теплопередачи через стенку из  $n$  слоев с учетом двух участков теплоотдачи равно:  $m = n + 2$ .

Анализ формулы (4.64) показывает, что при теплопередаче через шаровую стенку перепады температур на участках теплообмена ( $\Delta T_i$ ) прямо пропорциональны термическим сопротивлениям этих участков ( $R_{ш,i}$ ), поэтому для многослойной шаровой стенки можно записать:

$$\begin{aligned} \Delta T_1 : \Delta T_2 : \dots : \Delta T_i : \dots : \Delta T_m = \\ = R_{ш,1} : R_{ш,2} : \dots : R_{ш,i} : \dots : R_{ш,m}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

где  $m$  – число участков теплопередачи.

Например, для расчета теплопередачи через однослойную шаровую стенку (см. рис. 4.6) выражение (4.65) принимает вид:

$$\Delta T_1 : \Delta T_2 : \Delta T_3 = R_{ш,1} : R_{ш,2} : R_{ш,3}. \quad (4.66)$$

Рассчитав тепловой поток по формуле (4.59) для однослойной стенки или по формуле (4.62) для многослойной стенки, приступают к определению неизвестных температур на поверхностях стенки и на границах слоев, если стенка многослойная.

Рассмотрим расчет неизвестных температур на границах однослойной шаровой стенки  $T_{w1}$  и  $T_{w2}$ . Алгоритм расчета неизвестных температур на границах слоев многослойной стенки изложен в § 4.4.4.

При теплопередаче через однослойную шаровую стенку (см. рис. 4.6) неизвестными являются температуры на границах стенки  $T_{w1}$  и  $T_{w2}$ . Для расчета неизвестных температур выберем участок теплообмена таким образом, чтобы на одной его границе была известная температура, а на другой – искомая. Например, если для расчета температуры  $T_{w1}$  использовать температуру  $T_{f1}$ , а для расчета температуры  $T_{w2}$  – температуру холодного флюида  $T_{f2}$ , то в этом случае формулы для расчета искомых температур принимают вид:

$$Q = \frac{\pi(T_{f1} - T_{w1})}{R_{ш,1}} \Rightarrow T_{w1} = T_{f1} - Q \frac{R_{ш,1}}{\pi}; \quad (4.67)$$

$$Q = \frac{\pi(T_{w2} - T_{f2})}{R_{ш,3}} \Rightarrow T_{w2} = T_{f2} + Q \frac{R_{ш,3}}{\pi}. \quad (4.68)$$

В результате решения прямой задачи расчета теплопередачи через шаровую стенку найден тепловой поток, проходящий через стенку, и определены неизвестные температуры на границах стенки.

#### § 4.4.4. Алгоритм расчета теплопередачи через непроницаемые стенки

Согласно классификации задач тепломассообмена (см. § 3.1) существуют две постановки задачи расчета теплопередачи – *прямая* и *обратная*.

При решении *прямой* задачи расчета теплопередачи находят температурное поле и тепловой поток через стенку при заданных условиях однозначности – известных коэффициентах теплоотдачи, геометрических и теплофизических параметрах задачи. При прямой постановке задачи дополнительно должны быть заданы температуры в двух *любых* точках расчетной области теплопередачи. Отметим ещё раз, что не обязательно задавать только температуру флюидов или только температуру на границах слоев стенки.

При решении *обратной* задачи расчета теплопередачи находят один из параметров однозначности:

- толщину *i*-го слоя стенки  $\delta_i$ ;
- коэффициент теплопроводности материала *i*-го слоя стенки  $\lambda_i$ ;
- коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1$  или  $\alpha_2$ .

Для решения обратной задачи теплопередачи дополнительно должны быть заданы температуры в двух точках расчетной области теплообмена и тепловой поток (удельный тепловой поток) через стенку.

### § 4.4.4.1. Алгоритм решения прямой задачи расчета теплопередачи

1. На *первом* этапе решения *прямой* задачи рассчитывают термические сопротивления всех *элементарных* участков (элементарных слоев) теплопередачи:

- теплоотдачи от горячего флюида к стенке;
- теплопроводности всех слоев стенки;
- теплоотдачи от стенки к холодному флюиду.

2. На *втором* этапе расчета по формуле теплопередачи находят поверхностную плотность теплового потока ( $q$ ) для плоской стенки, линейную плотность теплового потока ( $q_\ell$ ) для цилиндрической стенки и тепловой поток ( $Q$ ) для шаровой стенки по двум заданным температурам и термическому сопротивлению участка между этими температурами, состоящему из  $k$  соседних слоев:

а) плоская стенка

$$q = \frac{\Delta T_i}{R_{t,i}} = \frac{\Delta T_k}{R_{t,k}} = \text{пост};$$

б) цилиндрическая стенка

$$q_\ell = \frac{\pi \Delta T_i}{R_{\ell,i}} = \frac{\pi \Delta T_k}{R_{\ell,k}} = \text{пост};$$

в) шаровая стенка

$$Q = \frac{\pi \Delta T_i}{R_{ш,i}} = \frac{\pi \Delta T_k}{R_{ш,k}} = \text{пост},$$

где  $\Delta T_k = \sum_{i=1}^k \Delta T_i$  – перепад температур на заданном участке теплопередачи;  $\Delta T_i$  – перепад температур на  $i$  - том

элементарном слое теплопередачи;  $R_{t,k} = \sum_{i=1}^k R_{t,i}$ ,

$R_{\ell,k} = \sum_{i=1}^k R_{\ell,i}$  и  $R_{ш,k} = \sum_{i=1}^k R_{ш,i}$  – термические сопротивления

плоской, цилиндрической и шаровой стенок расчетного участка теплопередачи между *заданными* температурами на границах этого участка;  $R_{t,i}$ ,  $R_{\ell,i}$  и  $R_{ш,i}$  – термические сопротивления плоской, цилиндрической и шаровой стенок  $i$ -го элементарного слоя теплопередачи;  $k$  – число элементарных слоев на расчетном участке между *заданными* температурами на границах этого участка.

3. На *третьем* этапе расчета теплопередачи находят неизвестные температуры в *заданной* области теплопередачи. Для этого выбирают участок теплообмена таким образом, чтобы на одной из его границ была известная температура, а на другой – искомая. Затем по формуле теплопередачи для стенки заданной формы находят неизвестную температуру, предварительно рассчитав термическое сопротивление выбранного участка теплообмена.

**Замечание.** Вышеприведенные формулы расчета теплопередачи получены при условии, что температура первого флюида больше температуры второго флюида ( $T_{f1} > T_{f2}$ ), что дает положительное значение теплового потока (тепловой поток направлен вдоль оси абсцисс). Если температура второго теплоносителя больше температуры первого теплоносителя ( $T_{f2} > T_{f1}$ ), то и в этом случае расчета теплопередачи применимы все вышеуказанные формулы без изменения. При нумерации участков теплообмена в направлении оси  $Ox$  для плоской стенки или оси  $Oz$  для стенки цилиндрической и сферической формы «отрицательное» значение теплового потока, которое в этом случае получается в расчете, свидетельствует лишь о том, что тепловой поток направлен против оси абсцисс.

#### § 4.4.4.2. Алгоритм решения обратной задачи расчета теплопередачи

1. На *первом* этапе решения обратной задачи теплопередачи находят термическое сопротивление участка теплопередачи между заданными температурами на границах элементарного *i*-го участка или на границах участка, состоящего из *k* соседних слоев, потому что в этом случае тепловой поток (удельный тепловой поток) задан по условию задачи:

а) плоская стенка

$$R_{t,i} = \frac{\Delta T_i}{q} \quad \text{или} \quad R_{t,k} = \frac{\Delta T_k}{q};$$

б) цилиндрическая стенка

$$R_{\ell,i} = \frac{\pi \Delta T_i}{q_{\ell}} \quad \text{или} \quad R_{\ell,k} = \frac{\pi \Delta T_k}{q_{\ell}};$$

в) шаровая стенка

$$R_{\text{ш},i} = \frac{\pi \Delta T_i}{Q} \quad \text{или} \quad R_{\text{ш},k} = \frac{\pi \Delta T_k}{Q},$$

где  $\Delta T_k = \sum_{i=1}^k \Delta T_i$  – перепад температур на заданном участке

теплопередачи;  $\Delta T_i$  – перепад температур на *i*-м элементар-

ном слое теплопередачи;  $R_{t,k} = \sum_{i=1}^k R_{t,i}$ ,  $R_{\ell,k} = \sum_{i=1}^k R_{\ell,i}$  и

$R_{\text{ш},k} = \sum_{i=1}^k R_{\text{ш},i}$  – термические сопротивления плоской, ци-

линдрической и шаровой стенок расчетного участка тепло-

передачи между заданными температурами;  $R_{t,i}$ ,  $R_{\ell,i}$  и  $R_{\text{ш},i}$

– термические сопротивления плоской, цилиндрической и

шаровой стенок  $i$ -го элементарного слоя теплопередачи;  $k$  – число элементарных слоев на расчетном участке между заданными температурами.

2. На *втором* этапе решения обратной задачи расчета теплопередачи через стенку по известному термическому сопротивлению находят в зависимости от цели расчета один из параметров однозначности:

- толщину слоя стенки  $\delta$ ;
- коэффициент теплопроводности материала стенки  $\lambda$ ;
- один из коэффициентов теплоотдачи  $\alpha_1$  или  $\alpha_2$ .

3. Если по условию задачи требуется рассчитать неизвестные температуры в заданной области теплопередачи, то необходимо выполнить пункты 1 и 3 алгоритма решения *прямой* задачи.

#### **§ 4.4.5. Интенсификация теплопередачи через непроницаемые стенки**

Под интенсификацией теплопередачи понимают увеличение количества переданной теплоты (теплового потока) через стенку при фиксированных температурах теплоносителей или заданном перепаде температур.

Рассмотрим два способа увеличения коэффициента теплопередачи (уменьшения термического сопротивления теплопередачи) и, соответственно, возрастания количества теплоты передаваемого через непроницаемую стенку: *конструктивный* и *режимный*.

##### **§ 4.4.5.1. Конструктивный способ интенсификации теплопередачи**

Изменение *конструкции* теплопередающей поверхности в целях увеличения коэффициента теплопередачи можно осуществить за счет уменьшения:

а) термического сопротивления теплопроводности стенки;

б) термического сопротивления теплоотдачи со стороны меньшего коэффициента теплоотдачи (меньшего  $\alpha$ ).

Для уменьшения термического *сопротивления теплопроводности* стенки  $R_{t,\lambda} = \delta/\lambda$  необходимо уменьшить толщину стенки  $\delta$  и использовать материалы с высоким коэффициентом теплопроводности  $\lambda$ .

Термическое *сопротивление теплоотдачи* можно уменьшить, если со стороны меньшего коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  увеличить поверхность теплообмена за счет ее оребрения. Для доказательства этого утверждения запишем формулу расчета теплопередачи (1.39) через стенку произвольной формы при допущении малости термического сопротивления теплопроводности ( $R_{t,\lambda} \rightarrow 0$ ):

$$Q \approx \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot F_1} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot F_2}} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_{t,F1} + R_{t,F2}}. \quad (4.69)$$

Предположим, что  $\alpha_2 \ll \alpha_1$ . При этом условии следует, что при равенстве площадей  $F_1 = F_2$  термическое сопротивление теплоотдачи около поверхности, окружаемой средой с температурой  $T_{f2}$ , будет много больше термического сопротивления теплоотдачи около поверхности, окружаемой средой с температурой  $T_{f1}$ :

$$R_{t,F2} \gg R_{t,F1} \text{ или } \frac{1}{\alpha_2 \cdot F_2} \gg \frac{1}{\alpha_1 \cdot F_1}. \quad (4.70)$$

Из формулы (4.70) следует, что для уменьшения термического сопротивления  $R_{t,F2}$  необходимо увеличить площадь  $F_2$  за счет ее оребрения до выполнения условия:

$$\frac{1}{\alpha_2 \cdot F_2^{\text{оребр}}} \approx \frac{1}{\alpha_1 \cdot F_1} \quad (4.71)$$

откуда следует, что

$$F_2^{\text{оребр}} \approx \alpha_1 \cdot F_1 / \alpha_2, \quad (4.72)$$

где  $F_2^{\text{оребр}}$  – площадь оребренной поверхности.

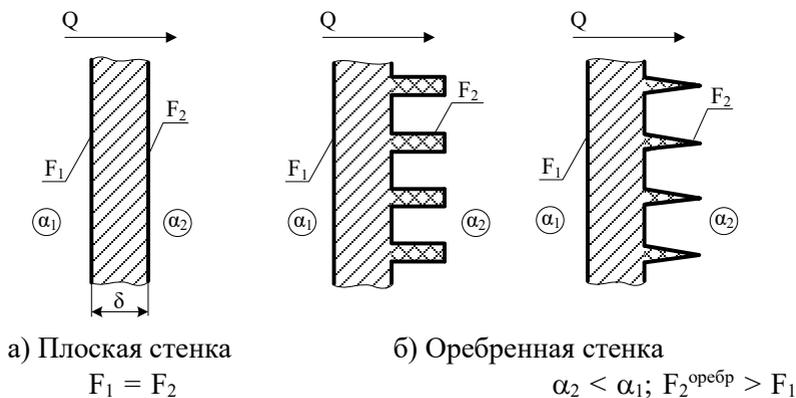


Рис. 4.7. Интенсификация теплопередачи за счет оребрения поверхности

Профиль ребра может быть прямоугольной, треугольной, трапецевидной и в общем случае произвольной геометрической формы (рис. 4.7).

*Замечание.* Наличие ребер на стенке изменяет режим внутреннего теплообмена теплопроводностью в стенке и внешнего конвективного теплообмена около оребренной стенки. Поэтому вывод, представленный формулой (4.72), которая получена без учета особенностей кондуктивного переноса теплоты в ребрах

разной конструкции и допущении постоянства коэффициента теплоотдачи с оребренной стороны стенки, является приближенным и демонстрирует лишь принцип конструктивной интенсификации теплопередачи. Расчет стационарной теплопередачи через оребренные стенки с учетом особенностей внутреннего и внешнего теплообмена при наличии оребрения приведен в литературе [4, 5, 13].

#### § 4.4.5.2. Режимный способ интенсификации теплопередачи

Изменяя режим внешнего теплообмена (скорость течения флюидов около непроницаемой стенки), можно увеличить или уменьшить интенсивность теплоотдачи с обеих сторон стенки.

Оценим влияние значения коэффициентов теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  на величину коэффициента теплопередачи через стенку  $k$ . Для этого запишем формулу для расчета коэффициента теплопередачи через плоскую стенку при допущении малости термического сопротивления теплопроводности стенки ( $R_{t,\lambda} = \delta/\lambda \rightarrow 0$ ):

$$k^* = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_1}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_2}{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 1}, \quad (4.73)$$

где  $k^*$  – коэффициент теплопередачи, рассчитанный при допущении малости  $R_{t,\lambda}$  ( $R_{t,\lambda} \rightarrow 0$ ).

Рассмотрим два крайних случая соотношения коэффициентов теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :

а) если  $\alpha_2 \gg \alpha_1$ , (пусть  $\alpha_2 \rightarrow \infty$ ), то в этом случае из формулы (4.73) следует, что  $k^* \rightarrow \alpha_1$ :

$$k^* = \frac{\alpha_1}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_1}{1 + \frac{\alpha_1}{\infty}} \rightarrow \alpha_1; \quad (4.74)$$

б) если  $\alpha_1 \gg \alpha_2$ , (пусть  $\alpha_1 \rightarrow \infty$ ), то из формулы (4.73) следует, что  $k^* \rightarrow \alpha_2$ :

$$k^* = \frac{\alpha_2}{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 1} = \frac{\alpha_2}{\frac{\alpha_2}{\infty} + 1} \rightarrow \alpha_2. \quad (4.75)$$

Анализируя выражения (4.74) и (4.75), можно сделать вывод о том, что коэффициент теплопередачи через стенку  $k$  не может быть больше меньшего из коэффициентов теплоотдачи:

$$k^* \leq \min(\alpha_1, \alpha_2). \quad (4.76)$$

Поэтому для увеличения коэффициента теплопередачи через непроницаемую стенку необходимо увеличивать *меньший* коэффициент теплоотдачи за счет изменения режима движения текучей среды (флюида).

#### § 4.4.6. Критический диаметр цилиндрической и шаровой стенок. Выбор изоляции

##### *Цилиндрическая стенка*

Рассмотрим теплопередачу через цилиндрическую стенку (рис. 4.8,а) на участке  $(w_1 - f_2)$  от внутренней поверхности стенки с температурой  $T_{w_1}$  до окружающей стенку среды с температурой  $T_{f_2}$ . Линейное термическое сопротивление этого участка  $(w_1 - f_2)$  зависит от наружного диаметра цилиндрической стенки:

$$R_{\ell} = R_{\ell,\lambda} + R_{\ell,\alpha_2} = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}, \quad (4.77)$$

где  $R_{\ell,\lambda}$  – линейное термическое сопротивление теплопроводности цилиндрической стенки;  $R_{\ell,\alpha_2}$  – линейное термическое сопротивление теплоотдачи от наружной поверхности цилиндрической стенки;  $d_1$  и  $d_2$  – внутренний и наружный диаметры цилиндрической стенки;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности стенки;  $\alpha_2$  – коэффициент теплоотдачи от наружной поверхности стенки к окружающей среде с температурой  $T_{f2}$ .

Анализ слагаемых формулы (4.77) показывает, что линейное термическое сопротивление теплопроводности цилиндрической стенки  $R_{\ell,\lambda}$  с увеличением наружного диаметра  $d_2$  (увеличением толщины стенки) растет по закону натурального логарифма, а линейное термическое сопротивление теплоотдачи цилиндрической стенки  $R_{\ell,\alpha_2}$  с увеличением наружного диаметра  $d_2$  (увеличением толщины стенки) уменьшается по гиперболическому закону. Очевидно, что существует такое значение наружного диаметра цилиндрической стенки, при котором линейные термические сопротивления будут равны  $R_{\ell,\lambda} = R_{\ell,\alpha_2}$ , а функция  $R_{\ell} = f(d_2)$  имеет экстремум в точке  $d_2 = d_{кр}$ , где  $d_{кр}$  – *критический диаметр* цилиндрической стенки.

*Критическим диаметром* называют такой диаметр цилиндрической стенки, при котором линейное термическое сопротивление теплопередачи имеет минимальное  $R_{\ell} = \min$ , а тепловой поток с поверхности цилиндрической стенки – максимальное  $q_{\ell} = \max$  значения.

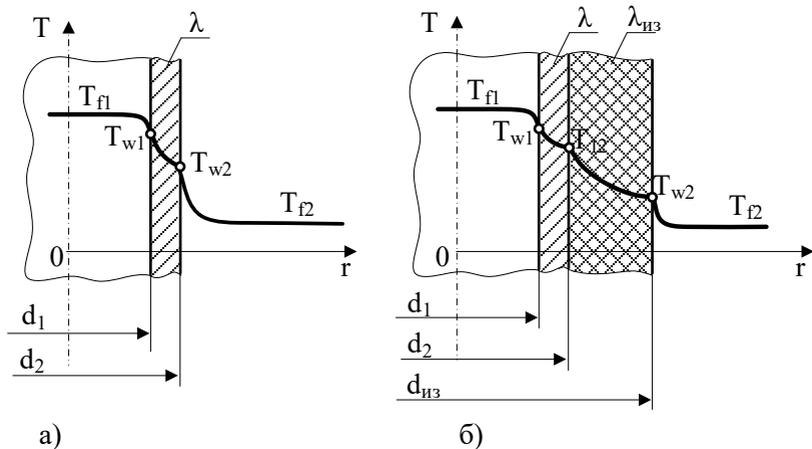


Рис. 4.8. Теплопередача через цилиндрическую стенку:  
 а – без тепловой изоляции; б – покрытую тепловой изоляцией

Для вывода формулы критического диаметра цилиндрической стенки продифференцируем линейное термическое сопротивление теплопередаче  $R_\ell$  (4.77) по наружному диаметру  $d_2$  и приравняем полученное выражение нулю:

$$\frac{d(R_\ell)}{d(d_2)} = \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{1}{d_2} - \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} = 0. \quad (4.78)$$

Решая последнее уравнение относительно  $d_2 = d_{кр}$ , получим формулу для расчета критического диаметра цилиндрической стенки:

$$d_{кр} = \frac{2\lambda}{\alpha_2}, \quad (4.79)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала стенки, Вт/(м·К);  $\alpha_2$  – коэффициент теплоотдачи от наружной

поверхности цилиндрической стенки с температурой  $T_{w2}$  в окружающую среду с температурой  $T_{f2}$ , Вт/(м<sup>2</sup>·К).

Анализ формулы (4.79) показывает, что критический диаметр цилиндрической стенки  $d_{кр} = f(\lambda, \alpha_2)$  зависит от конструктивного параметра – коэффициента теплопроводности вещества, из которого выполнена стенка, и от режимного параметра – коэффициента теплоотдачи, который характеризует интенсивность внешнего теплообмена, и не зависит от геометрии цилиндрической стенки. Поэтому для цилиндрических стенок с одинаковой геометрией, но выполненных из разных материалов и обменивающихся теплотой с окружающей средой с разной интенсивностью, критический диаметр может существенно отличаться.

Докажем последнее утверждение, используя числовой пример для расчета критического диаметра цилиндрической стенки с внутренним диаметром  $d_{вн} = d_1 = 0,1$  м, выполненной из двух материалов с существенно разными значениями коэффициента теплопроводности – для углеродистой стали с коэффициентом теплопроводности  $\lambda = 50$  Вт/(м·К) (*первый* вариант) и для диэлектрика с коэффициентом теплопроводности  $\lambda = 0,2$  Вт/(м·К) (*второй* вариант).

Коэффициент теплоотдачи с внешней стороны обеих цилиндрических стенок примем в интервале  $\alpha_2 = 10 \div 20$  Вт/(м<sup>2</sup>·К), что характерно для условий свободной конвекции в зависимости от перепада температур между стенкой и окружающей средой.

В расчетах примем, что стальная стенка охлаждается флюидом с коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_2 = 20$  Вт/(м<sup>2</sup>·К) (*первый* вариант), а стенка из диэлектрика охлаждается в окружающей среде с коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_2 = 10$  Вт/(м<sup>2</sup>·К) (*второй* вариант).

Рассчитаем критический диаметр цилиндрической стенки для исходных данных *первого* и *второго* варианта:

а) стенка с  $\lambda = 50 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$  при  $\alpha_2 = 20 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$

$$d_{\text{кр}}|_{\text{IВ}} = \frac{2\lambda}{\alpha_2} = \frac{2 \cdot 50}{20} = 5 \text{ м};$$

б) стенка с  $\lambda = 0,2 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$  при  $\alpha_2 = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$

$$d_{\text{кр}}|_{\text{IIВ}} = \frac{2\lambda}{\alpha_2} = \frac{2 \cdot 0,2}{10} = 0,04 \text{ м}.$$

В результате расчета мы получили, что у цилиндрической стенки с фиксированными геометрическими размерами (внутренним диаметром  $d_{\text{вн}} = d_1$  и  $d_{\text{нар}} = d_2$ ) критический диаметр, в зависимости от значений коэффициента теплопроводности  $\lambda$  и коэффициента теплоотдачи  $\alpha_2$ , существенно отличается ( $d_{\text{кр}}|_{\text{IВ}} = 5 \text{ м} / d_{\text{кр}}|_{\text{IIВ}} = 0,04 \text{ м}$ ) в 125 раз!

Графики зависимости линейного термического сопротивления теплопроводности  $R_{\ell,\lambda} = f(d_2)$ , линейного термического сопротивления теплоотдачи с наружной стороны стенки  $R_{\ell,\alpha_2} = f(d_2)$  и суммарного линейного термического сопротивления  $R_{\ell} = R_{\ell,\lambda} + R_{\ell,\alpha_2} = f(d_2)$  от наружного диаметра (толщины стенки) приведены на рис. 4.9 для *первого* варианта ( $\lambda = 50 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$  и  $\alpha_2 = 20 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$ ) и на рис. 4.10 – для *второго* варианта ( $\lambda = 0,2 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$  и  $\alpha_2 = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$ ) исходных данных.

На рис. 4.9 и рис. 4.10 можно видеть, что с увеличением толщины стенки линейное термическое сопротивление теплопроводности  $R_{\ell,\lambda}$  растет (кривая 1), а линейное

термическое сопротивление теплоотдачи с наружной стороны стенки  $R_{\ell, \alpha_2}$  уменьшается (кривая 2).

Суммарное линейное термическое сопротивление теплопередачи  $R_\ell$  для *первого* варианта исходных данных (см. рис. 4.9) сначала убывает, а затем возрастает (кривая 3) и при критическом значении наружного диаметра стенки  $d_{\text{кр}}|_{\text{IV}} = 5$  метров имеет минимум. При этом критический диаметр цилиндрической стенки больше наперед заданного внутреннего диаметра  $d_{\text{кр}}|_{\text{IV}} = 5\text{ м} > d_1 = 0,1\text{ м}$ .

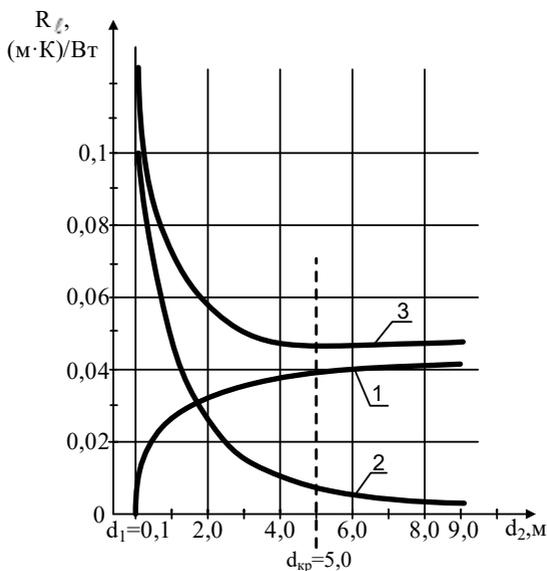


Рис. 4.9. Линейное термическое сопротивление цилиндрической стенки при  $\lambda = 50 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$  и  $\alpha_2 = 20 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$

1 –  $R_{\ell, \lambda}$ ; 2 –  $R_{\ell, \alpha_2}$ ; 3 –  $R_\ell$

Минимум функции суммарного линейного термического сопротивления теплопередачи  $R_\ell$  для *второго*

варианта исходных данных (кривая 3 на рис. 4.10) расположен левее внутреннего диаметра ( $d_{\text{кр}}|_{\text{ПВ}} = 0,04\text{ м} < d_1 = 0,1\text{ м}$ ) и поэтому график этой функции в полном объеме изобразить нельзя.

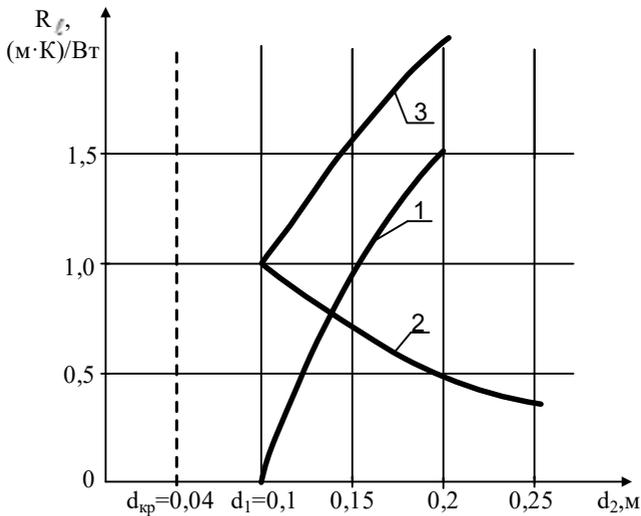


Рис. 4.10. Линейное термическое сопротивление цилиндрической стенки при  $\lambda = 0,2 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$  и  $\alpha_2 = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$

1 –  $R_{l,\lambda}$ ; 2 –  $R_{l,\alpha_2}$ ; 3 –  $R_l$

**Замечание.** Для «красоты» иллюстрации в учебниках по теплообмену на графиках критический диаметр совмещают с диаметром, при котором равны линейные термические сопротивления теплопроводности и теплоотдачи  $R_{l,\lambda} = R_{l,\alpha_2}$  (кривые 1 и 2 на графике пересекаются в точке  $d_{\text{кр}}$ ). Поскольку для изображения графика функции  $R_{l,\lambda} = 1 / 2\lambda \cdot \ln(d_2 / d_1)$  необходимо задавать внутренний диаметр  $d_1$ , то несложно показать, что в этом случае графики надо рисовать, задавая внутренний диаметр равным  $d_1 = (\epsilon / 2) \cdot (\lambda / \alpha_2)$ , где  $\epsilon = 2,71828$  – основание

натурального логарифма. Данное значение внутреннего диаметра получено при подстановке в равенство  $R_{\ell,\lambda} = R_{\ell,\alpha_2}$  значения критического диаметра  $d_{кр} = 2\lambda / \alpha_2$ .

### ***Шаровая стенка***

Рассмотрим теплопередачу через шаровую стенку (см. рис. 4.6) на участке ( $w_1 - f_2$ ) от внутренней поверхности стенки с температурой  $T_{w1}$  до окружающей стенку среды с температурой  $T_{f2}$ . Термическое сопротивление этого участка зависит от наружного диаметра шаровой стенки:

$$R_{ш} = R_{ш,\lambda} + R_{ш,\alpha_2} = \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}, \quad (4.80)$$

где  $R_{ш,\lambda} = 1/(2\lambda) \cdot (1/d_1 - 1/d_2)$  – термическое сопротивление теплопроводности шаровой стенки, К/Вт;  $(R_{ш,3} = 1/(\alpha_2 d_2^2))$  – термическое сопротивление теплоотдачи от шаровой стенки к холодному флюиду, К/Вт.

Найдем *критический* диаметр шаровой стенки, при котором термическое сопротивление теплопередачи имеет минимальное  $R_{ш} = \min$ , а тепловой поток с поверхности шаровой стенки – максимальное  $Q = \max$  значения, выполняя процедуру поиска экстремума функции  $R_{ш} = f(d_2)$ :

$$\frac{d(R_{ш})}{d(d_2)} = \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{1}{d_2^2} - \frac{2}{\alpha_2 d_2^3} = 0. \quad (4.81)$$

Решая последнее уравнение относительно  $d_2 = d_{кр}$ , получим формулу для расчета критического диаметра шаровой стенки:

$$d_{\text{кр}} = \frac{4\lambda}{\alpha_2}, \quad (4.82)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала стенки, Вт/(м·К);  $\alpha_2$  – коэффициент теплоотдачи от наружной поверхности шаровой стенки с температурой  $T_{w2}$  в окружающую среду с температурой  $T_{f2}$ , Вт/(м<sup>2</sup>·К).

### ***Выбор изоляции***

Для уменьшения тепловых потерь при транспорте теплоносителя трубопроводы покрывают тепловой изоляцией (рис. 4.8,б). При выборе тепловой изоляции необходимо принимать во внимание конструктивные и режимные параметры теплопередачи через цилиндрический слой изоляции, которые учитывают при помощи критического диаметра изоляции:

$$d_{\text{из,кр}} = \frac{2\lambda_{\text{из}}}{\alpha_2}. \quad (4.83)$$

Докажем это утверждение рассуждая от противного. Для этого рассмотрим пример *нерационального* нанесения тепловой изоляции, который имеет место при условии  $d_{\text{из,кр}} > d_2$  (рис. 4.11). В этом случае наложение тепловой изоляции на трубу с наружным диаметром  $d_2$  на участке  $d_2 \div d_{\text{из,кр}}$  приводит к уменьшению линейного термического сопротивления теплопередачи через слой изоляции а следовательно, и к увеличению тепловых потерь теплоносителя ( $R_{\ell,\text{из}} \downarrow$ ,  $q_\ell \uparrow$ ). На участке  $d_{\text{из}} > d_{\text{из,кр}}$  линейное термическое сопротивление изоляции растёт, а тепловой поток уменьшается ( $R_{\ell,\text{из}} \uparrow$ ,  $q_\ell \downarrow$ ). При равенстве

диаметров  $d_{из} = d_{из}^*$  (см. рис. 4.11) линейное термическое сопротивление изоляции и тепловой поток становятся равными линейному термическому сопротивлению теплопередачи и тепловому потоку через цилиндрическую стенку с наружным диаметром  $d_2$  без тепловой изоляции ( $R_{\ell,из} = R_{\ell}$ ,  $q_{\ell,из} = q_{\ell}$ ). Таким образом, при нерациональном выборе тепловой изоляции слой изоляции толщиной  $\delta_{из} = 0,5(d_{из}^* - d_2)$  не выполняет своей теплозащитной функции, поэтому затраты на изоляцию и ее монтаж оказываются напрасными. И только на участке  $d_{из} > d_{из}^*$  тепловые потери становятся меньше тепловых потерь через цилиндрическую стенку без изоляции. Поэтому при рациональном выборе тепловой изоляции необходимо выполнять условие:

$$d_{из,кр} \leq d_2 \quad \text{или} \quad \frac{2\lambda_{из}}{\alpha_2} \leq d_2. \quad (4.84)$$

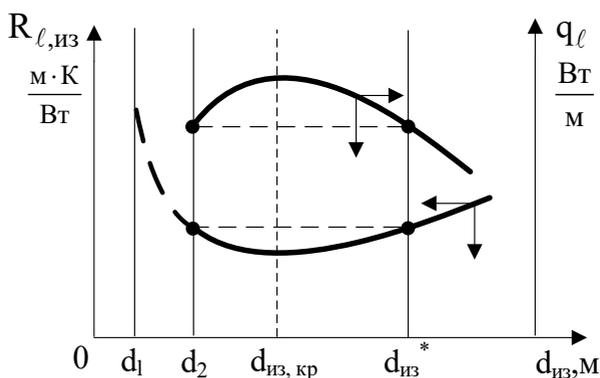


Рис. 4.11. Термическое сопротивление и тепловые потери в зависимости от толщины изоляции

Используя условие (4.84), можно рассчитать коэффициент теплопроводности тепловой изоляции, при нанесении которой на трубы круглого сечения заданной геометрии и известной интенсивности внешнего теплообмена, тепловые потери уменьшаются:

$$\lambda_{\text{из}} \leq \frac{d_2 \alpha_2}{2}. \quad (4.85)$$

**Замечание.** При протекании электрического тока по проводнику выделяется теплота, которая увеличивает потери электрической энергии при ее передаче. Поэтому при выборе электрической изоляции учитывают условие обратное условию (4.84):

$$d_{\text{из,кр}} \geq d_2. \quad (4.86)$$

В этом случае тепловые потери с поверхности проводника электрической энергии растут и происходит его охлаждение (см. рис. 4.11). При этом, естественно, должны быть соблюдены требования к качеству электротехнических свойств изоляции.

### **Контрольные вопросы** *по материалам четвертой главы*

1. Дайте определение понятия «теплопередача» и «тепломассопередача».
2. Назовите условия протекания стационарной и нестационарной теплопередачи.
3. Напишите формулу для расчета стационарного температурного поля в плоской стенке и нарисуйте график  $T(x)$ .
4. Напишите формулу для расчета стационарного температурного поля в цилиндрической стенке и нарисуйте график  $T(r)$ .
5. Напишите формулу для расчета стационарного температурного поля в шаровой стенке и нарисуйте график  $T(r)$ .
6. Напишите формулу для расчета теплового потока при стационарной теплопроводности в плоской стенке.
7. Напишите формулу для расчета теплового потока при стационарной теплопроводности в цилиндрической стенке.

8. Напишите формулу для расчета теплового потока при стационарной теплопроводности в шаровой стенке.
9. Напишите формулу для расчета коэффициента теплопередачи через плоскую стенку.
10. Напишите формулу для расчета линейного коэффициента теплопередачи через цилиндрическую стенку.
11. Напишите формулу для расчета коэффициента теплопередачи через шаровую стенку.
12. Нарисуйте график температурного поля при теплопередаче через плоскую стенку.
13. Нарисуйте график температурного поля при теплопередаче через цилиндрическую стенку.
14. Нарисуйте график температурного поля при теплопередаче через шаровую стенку.
15. Напишите формулу расчета теплового потока через цилиндрическую стенку, используя упрощенный метод.
16. Изложите алгоритм решения прямой задачи расчета теплопередачи.
17. Изложите алгоритм решения обратной задачи расчета теплопередачи.
18. Поясните понятие «интенсификация теплопередачи» и поясните суть конструктивного способа интенсификации теплопередачи.
19. Поясните понятие «интенсификация теплопередачи» и поясните суть режимного способа интенсификации теплопередачи.
20. Поясните понятие «критический диаметр» и напишите формулу расчета критического диаметра цилиндрической стенки.
21. Поясните понятие «критический диаметр» и напишите формулу расчета критического диаметра шаровой стенки.
22. Назовите условие эффективного выбора тепловой изоляции.
23. Назовите условие эффективного выбора электрической изоляции.

## ЧАСТЬ 2

---

### ВНУТРЕННИЙ ТЕПЛООБМЕН

К задачам *внутреннего* теплообмена относят задачи расчета температурных полей и потоков теплоты в твердых телах, формируемых в процессе *теплопроводности* при заданных условиях теплообмена на границах твердого тела.

Рассмотрим расчет температурного поля и тепловых потоков в заданном твердом теле в процессе теплопроводности при отсутствии (глава 5) и при наличии (глава 6) внутренних источников теплоты.

### ГЛАВА 5. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Расчет температурного поля и тепловых потоков в процессе теплопроводности рассмотрим на примере нагрева или охлаждения твердых тел, поскольку в твердых телах перенос теплоты происходит только теплопроводностью.

#### § 5.1. Основной закон теории теплопроводности. Закон (гипотеза) Фурье

Суть основного закона теплопроводности – закона, который устанавливает функциональную связь между температурным полем и тепловым потоком в заданной точке тела или системы тел, кратко изложена в первой части учебника (§ 1.5.1). В 1804 году французский физик Био́ (Jean-Baptiste Biot) предложил гипотезу о том, что интенсивность теплопереноса связана со скоростью изменения температурного поля в пространстве. На основе этой идеи в 1807 году известный математик Фурье (Jean-Baptiste Joseph Fourier) предположил, что количество теплоты, проходящее между двумя изотермическими поверхностями,

прямо пропорционально времени процесса  $\tau$ , площади поверхности теплообмена  $F$ , разности температур изотермических поверхностей  $\Delta T$  и обратно пропорционально расстоянию между изотермическими поверхностями  $\Delta n$ :

$$Q_{\tau} \sim \tau \cdot F \cdot \frac{\Delta T}{\Delta n}. \quad (5.1)$$

Используя в качестве коэффициента пропорциональности в формуле (5.1) коэффициент теплопроводности  $\lambda$  и заменяя отношение  $\Delta T / \Delta n$  градиентом температурного поля  $\text{grad}(T)$ , закон Фурье для теплового потока и поверхностной плотности теплового потока принимает вид:

$$\bar{Q} = -\lambda \cdot \text{grad}(T) \cdot F; \quad \bar{q} = -\lambda \cdot \text{grad}(T), \quad (5.2)$$

где  $\bar{Q}$  – тепловой поток, Вт;  $\bar{q}$  – поверхностная плотность теплового потока, Вт/м<sup>2</sup>.

Тепловой поток и поверхностная плотность теплового потока – векторные величины, имеющие направление распространения теплоты противоположное направлению градиента температурного поля (по определению). На это обстоятельство указывает знак минус «-» в формулах (5.2). В разделе § 3.2.2.1 доказано, что учет знака градиента температуры в явном виде при симметричном теплообмене твердых тел с окружающей средой приводит к записи закона Фурье в виде:

$$\bar{Q} = \lambda \cdot \text{grad}(T) \cdot F; \quad \bar{q} = \lambda \cdot \text{grad}(T). \quad (5.3)$$

В инженерных расчетах используют скалярную форму записи основного закона теплопроводности, поэтому знак вектора над обозначениями потоков  $\bar{Q}$  и  $\bar{q}$  опускают и в формулы (5.3) подставляют модуль градиента температуры:

$$Q = \lambda \cdot |\text{grad}(T)| \cdot F; \quad q = \lambda \cdot |\text{grad}(T)|. \quad (5.4)$$

Например, для тел простой формы закон Фурье записывают так:

$$Q = \lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} F = \frac{\lambda}{R} \frac{\partial T}{\partial X} F; \quad q = \lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\lambda}{R} \frac{\partial T}{\partial X}, \quad (5.5)$$

где  $|\nabla T| = \partial T / \partial x_1$  – модуль градиента температуры, К/м;  $x_1$  – первая координата в ортогональной системе координат (см. § 1.1), которая имеет смысл  $x_1 = x$  для декартовой системы координат и  $x_1 = r$  для цилиндрической и сферической систем координат, м;  $R$  – размер расчетной области (линейный масштаб тела), м;  $X = x_1 / R$  – безразмерная координата.

Функциональная связь переменного температурного поля и теплового потока при переносе теплоты теплопроводностью, которую выражает закон Фурье, справедлива для всех сплошных сред (твердых, жидких и газообразных) в стационарных и нестационарных процессах теплообмена.

**Замечание.** При математическом моделировании теплообмена (аналитическими и численными методами) для расчета теплового потока необходимо использовать закон Фурье в записи (5.2). В этом случае знак теплового потока и знак градиента температурного поля учитываются автоматически в процессе вычислений.

Коэффициент теплопроводности – физическая величина, характеризующая способность вещества проводить теплоту и определяемая экспериментально в зависимости от температуры для каждого вещества во всех возможных фазовых состояниях (твердом, жидком или газообразном).

Учет зависимости коэффициента теплопроводности от температуры  $\lambda = f(T)$  приводит к *нелинейной* форме записи закона Фурье, которая более точно отражает процесс переноса теплоты теплопроводностью:

$$\bar{Q} = -\lambda(T) \cdot \text{grad}(T) \cdot F; \quad \bar{q} = -\lambda(T) \cdot \text{grad}(T). \quad (5.6)$$

При этом для разных веществ коэффициент теплопроводности  $\lambda$  может как увеличиваться, так и уменьшаться с ростом температуры.

Коэффициент теплопроводности зависит не только от температуры, но и от состава вещества, его структуры, влажности и ряда других факторов, которые надо учитывать в расчетах теплообмена. Например, при выполнении теплотехнических расчетов коэффициент теплопроводности принимают по справочным таблицам. Однако состав и структура образца, для которого коэффициент теплопроводности был найден в опыте и приведен в справочной литературе, может не полностью соответствовать материалу, используемому при выполнении конкретного инженерного теплового расчета. Величина ошибки в этом случае не предсказуема.

При выполнении поверочного расчета теплового и термонапряженного состояния конструкций, бывших в эксплуатации, необходимо также учитывать фактор старения – изменение физических свойств материала с течением времени.

Для пористого и сыпучего материала коэффициент теплопроводности  $\lambda$  зависит от порозности (величины пор и их количества в твердом теле) и от его влажности.

С увеличением порозности материала коэффициент теплопроводности  $\lambda$  уменьшается, если поры заполняются газом с меньшим коэффициентом теплопроводности по сравнению с твердым скелетом материала.

При увеличении влажности поры заполняются жидкостью и вследствие этого коэффициент теплопроводности увеличивается.

Примеси к металлам уменьшают коэффициент теплопроводности.

Коэффициент теплопроводности газов зависит от температуры и от давления.

Погрешность экспериментального определения теплофизических характеристик вещества, включая и коэффициент теплопроводности  $\lambda$ , составляет величину не менее 5–10%, что также необходимо учитывать при выполнении теплового расчета.

Приведем примерные значения коэффициента теплопроводности  $\lambda$  для разных веществ. Поскольку  $\lambda$  зависит от температуры, то значения коэффициента теплопроводности взяты из справочника [21] при температуре  $T = 0^\circ\text{C}$ .

Таблица 5.1  
Коэффициент теплопроводности при  $T = 0^\circ\text{C}$

Вещество	$\lambda$ , Вт/(м·К)
Медь	390
Сталь	10÷50
Огнеупоры	0,25÷3
Тепловая изоляция	0,05÷0,25
Газы	0,005÷0,4
Жидкости	0,08÷0,7

## § 5.2. Коэффициент температуропроводности. Энергетическая форма записи основного закона теплопроводности

Коэффициент температуропроводности  $a$ ,  $\text{м}^2/\text{с}$ , характеризует *теплоинерционные свойства вещества* или, другими словами, характеризует *скорость изменения температуры в каждой точке тела во времени*, потому что скорость изменения температуры прямо пропорциональна коэффициенту температуропроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} \sim \mathbf{a}. \quad (5.7)$$

Из анализа формулы (5.7) следует, что коэффициент температуропроводности характеризует только *нестационарные* процессы.

Коэффициент температуропроводности  $\mathbf{a}$  – физическая характеристика вещества, которую определяют экспериментально и приводят, в зависимости от температуры, в справочниках, например в [21].

Коэффициент температуропроводности функционально связан с другими физическими характеристиками вещества соотношениями:

$$\mathbf{a} = \frac{\lambda}{\rho c}; \quad \mathbf{a} = \frac{\lambda}{c'}, \quad (5.8)$$

где  $c$  – удельная массовая теплоемкость, Дж/(кг·К);  $c'$  – удельная объемная теплоемкость, Дж/(м<sup>3</sup>·К);  $\rho$  – плотность вещества, кг/м<sup>3</sup>;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности Вт/(м·К).

Для газов, у которых теплоемкость зависит от вида процесса, коэффициент температуропроводности тоже является функцией процесса:

– для изохорного процесса  $\mathbf{v} = \mathbf{const}$ : 
$$a_v = \frac{\lambda}{\rho c_v} = \frac{\lambda}{c'_v};$$

– для изобарного процесса  $\mathbf{p} = \mathbf{const}$ : 
$$a_p = \frac{\lambda}{\rho c_p} = \frac{\lambda}{c'_p},$$

где  $c_v$  – удельная *массовая* изохорная теплоемкость, Дж/(кг·К);  $c_p$  – удельная *массовая* изобарная теплоемкость, Дж/(кг·К);  $c'_v$  – удельная *объемная* изохорная теплоемкость, Дж/(м<sup>3</sup>·К);  $c'_p$  – удельная *объемная* изобарная теплоемкость, Дж/(м<sup>3</sup>·К).

Для записи закона Фурье в *энергетической форме* заменим коэффициент теплопроводности  $\lambda$  в классической форме записи закона теплопроводности (5.3) выражением

$$\lambda = a_v \rho c_v = a_v c'_v; \quad \lambda = a_p \rho c_p = a_p c'_p. \quad (5.9)$$

Тогда для *изохорных* процессов закон Фурье в энергетической форме записи принимает вид:

$$\bar{q} = a_v c'_v \nabla T = a_v \nabla (c'_v T) = a_v \text{grad}(u'); \quad (5.10)$$

$$\bar{q} = a_v \rho c_v \nabla T = a_v \nabla (\rho c_v T) = a_v \text{grad}(\rho u), \quad (5.11)$$

где  $\nabla(\rho u) = \nabla u'$  – изменение удельной объемной внутренней энергии, Дж/м<sup>3</sup>;  $\nabla u$  – изменение удельной массовой внутренней энергии, Дж/кг;  $\rho$  – плотность вещества, кг/м<sup>3</sup>.

Аналогично для *изобарных* процессов энергетическую форму закона Фурье записывают в виде:

$$\bar{q} = a_p c'_p \nabla T = a_p \nabla (c'_p T) = a_p \text{grad}(h'); \quad (5.12)$$

$$\bar{q} = a_p \rho c_p \nabla T = a_p \nabla (\rho c_p T) = a_p \text{grad}(\rho h), \quad (5.13)$$

где  $\nabla h' = \nabla(\rho h)$  – изменение удельной объемной энтальпии, Дж/м<sup>3</sup>;  $\nabla h$  – изменение удельной массовой энтальпии, Дж/кг;  $\rho$  – плотность вещества, кг/м<sup>3</sup>.

Для твердых тел и капельных жидкостей, обладающих малым коэффициентом температурного расширения, удельная изобарная и удельная изохорная теплоемкости отличаются незначительно и в инженерных расчетах принимают, что эти теплоемкости равны:

$$c_p \approx c_v = c; \quad a_p \approx a_v = a. \quad (5.14)$$

В справочных таблицах приводят значение теплоемкости вещества при постоянном давлении – изобарную теплоемкость  $c_p$ , поэтому основной закон теплопроводности – закон

Фурье в энергетической форме записи окончательно принимает вид:

$$\vec{q} = a \cdot \text{grad}(\rho h) = a \cdot \text{grad}(h'). \quad (5.15)$$

Порядок величины коэффициента теплопроводности можно характеризовать следующими величинами:

$a \approx 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$  – у тепловой изоляции;

$a \approx 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$  – у огнеупоров;

$a \approx 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$  – у углеродистой стали.

*Замечание.* В специальных энергетических расчетах теплопроводности в стационарном режиме также используют коэффициент теплопроводности  $a$ , заменяя коэффициент теплопроводности  $\lambda$  соотношением  $\lambda = a \cdot \rho c_p$ .

### § 5.3. Дифференциальное уравнение теплопроводности

#### § 5.3.1. Вывод дифференциального уравнения теплопроводности

Тепловой поток  $Q$  в каждой точке тела при передаче теплоты теплопроводностью находят по закону Фурье при известном (рассчитанном или найденном экспериментально) температурном поле  $T(x_i, \tau)$ . Применяя *экспериментальный* метод исследования теплопроводности, опытные значения температуры находят в дискретных точках тела путем установки датчиков температуры, подключенных к вторичным измерительным приборам. При этом эксперимент проводят либо непосредственно на исследуемом объекте, либо на его модели, построенной по правилам теории подобия (см. § 3.2.3).

*Теоретический* метод требует создания концептуальной и математической моделей процесса переноса теплоты теплопроводностью (см. § 3.2.2).

На первом этапе применения теоретического метода рассмотрим концептуальную модель теплопроводности, которая *качественно* описывает процесс переноса теплоты теплопроводностью при нагреве твердого тела в виде бесконечной пластины толщиной  $\delta$  с начальной температурой  $T_0$ , в среде с температурой  $T_f$  выше, чем температура  $T_0$  ( $T_f > T_0$ ) (рис. 5.1). Твердое тело, получая энергию от горячей среды, будет нагреваться, и его температура повышется с течением времени в каждой точке тела в интервале температур от  $T_0$  до  $T_f$ . В момент времени  $\tau_*$  пластина по всему объему примет температуру равную температуре греющей среды  $T(x, \tau_*) = T_f$ . Изменение тепловой внутренней энергии (а следовательно, и температуры) в каждом элементарном объеме  $dV$  за время  $dt$  в процессе теплопроводности происходит за счет:

- поглощения тепловой энергии при нагреве или выделении теплоты при его охлаждении. При этом часть энергии не усваивается элементарным объемом и проходит через него транзитом;

- выделение или поглощение теплоты за счет действия внутренних источников или стоков теплоты мощностью  $q_v$ .

Поняв физическую суть изменения температуры тела в процессе теплопроводности, на втором этапе применения теоретического метода выполним математическое описание теплопроводности в твердом теле.

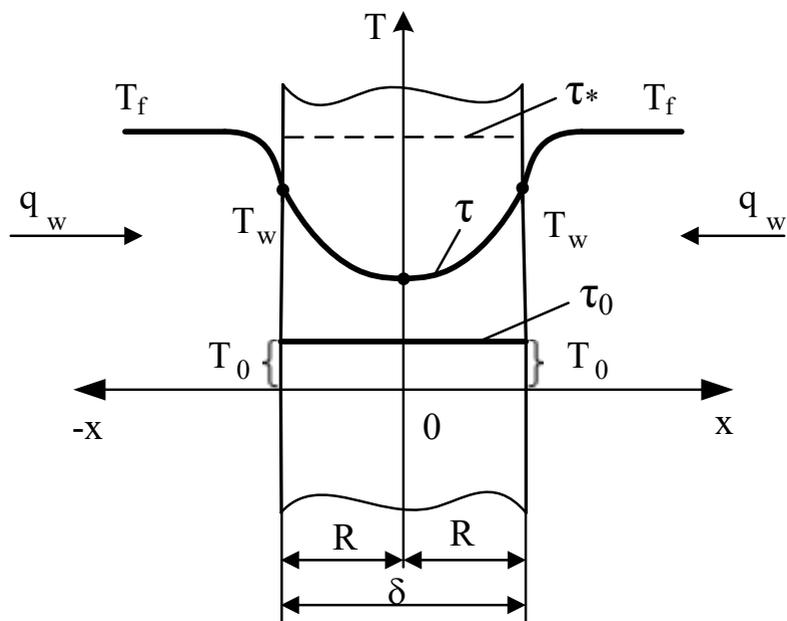


Рис. 5.1. Нагрев пластины в среде с температурой  $T_f$ :  $t_0$  – начало нагрева;  $\tau$  – текущее время нагрева;  $\tau^*$  – время, при котором температура тела равна температуре окружающей среды  $T_f$

Математическая модель, отражающая баланс тепловой энергии в элементарном объеме  $dV$  за время  $dt$ , в виде уравнения (3.2) рассмотрена в третьей главе учебника и имеет вид:

$$d^2Q_\tau = d^2Q_{\tau, \text{конд}(w)} + d^2Q_{\tau, \text{ист}},$$

где  $d^2Q_\tau$  – изменение теплоты (внутренней энергии или энтальпии) в объеме  $dV$  за время  $dt$ , Дж;  $d^2Q_{\tau, \text{конд}(w)}$  – поступление или уход теплоты кондукцией (теплопроводностью) в твердых телах в объеме  $dV$  за время  $dt$ , Дж;  $d^2Q_{\tau, \text{ист}}$  – поступление или уход теплоты за счет действия

внутренних источников или стоков теплоты мощностью  $q_v$  в объеме  $dV$  за время  $d\tau$ , Дж.

Подставляя в последнее уравнение значение  $d^2Q_\tau = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} dV d\tau$  из формулы (3.6) и заменяя слагаемые  $d^2Q_{\tau, \text{конд}(w)} = -\text{div}(\vec{q}) dV d\tau$  и  $d^2Q_{\tau, \text{ист}} = q_v dV d\tau$  в правой части уравнения теплового баланса их значениями (без вывода), получим дифференциальное уравнение теплопроводности в векторной форме записи:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} dV d\tau = -\text{div}(\vec{q}) dV d\tau + q_v dV d\tau.$$

Разделив все члены последнего уравнения на произведение  $dV d\tau$ , имеем:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\text{div}(\vec{q}) + q_v, \quad (5.16)$$

где  $T$  – температура элементарного объема в данный момент времени, °С (К);  $\tau$  – время, с;  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $c_p$  – удельная массовая изобарная теплоемкость, Дж/(кг·К);  $\rho c_p = c'_p$  – удельная объемная изобарная теплоемкость, Дж/(м<sup>3</sup>·К);  $\text{div}(\vec{q})$  – дивергенция вектора поверхностной плотности теплового потока, Вт/м<sup>3</sup>;  $q_v$  – мощность внутренних источников или стоков теплоты, Вт/м<sup>3</sup>.

Подставляя в дифференциальное уравнение (5.16) значение плотности теплового потока  $\vec{q}$ , найденное по закону Фурье (5.2), окончательно получим классическое дифференциальное уравнение теплопроводности в векторной форме записи:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}(T)) + q_v. \quad (5.17)$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности впервые вывел французский ученый Фурье в 1814 году и поэтому оно носит его имя – дифференциальное уравнение Фурье. Дифференциальное уравнение теплопроводности относится к классу дифференциальных уравнений в частных производных *параболического* типа.

Решая дифференциальное уравнение (5.17) с заданными условиями однозначности (см. § 3.2.2), находят температурное поле  $T(x_i, \tau)$ . Температурное поле характеризует изменение температуры в пространстве и времени, поэтому можно сделать вывод о том, что дифференциальное уравнение теплопроводности устанавливает *связь между пространственным и временным изменениями* температуры в заданной расчетной области (в неравновесной термодинамической системе).

Расчет градиента температурного поля в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат выполняют по формулам (1.4), (1.5) и (1.6) соответственно (см. § 1.2). Для декартовой системы координат градиент температуры равен (1.4):

$$\operatorname{grad}(T) = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}$$

Математическое выражение оператора дивергенции ( $\operatorname{div}$ ) приведено в справочниках по математике в зависимости от вида системы координат и, например, в декартовой системе координат имеет вид:

$$\operatorname{div} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Раскрывая операторы **div** и **grad** в дифференциальном уравнении (5.17), получим в развернутом виде дифференциальное уравнение теплопроводности в декартовой системе координат:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v. \quad (5.18)$$

Рассуждая аналогично, можно записать дифференциальное уравнение теплопроводности в цилиндрической и сферической системах координат [5]. В цилиндрической системе координат:

– дивергентная форма записи

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v; \quad (5.19)$$

– обычная форма записи

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v,$$

(5.20)

где  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  – цилиндрические координаты.

В сферической системе координат:

– дивергентная форма записи

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \psi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sin \psi \cdot \lambda \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + q_v; \quad (5.21)$$

– обычная форма записи

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \psi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sin \psi \cdot \lambda \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + q_v, \quad (5.22)$$

где  $r, \varphi, \psi$  – сферические координаты.

**Замечание.** Так называемую обычную форму записи дифференциального уравнения теплопроводности в цилиндрической и сферической системах координат получают дифференцированием произведения, стоящего в круглых скобках первого слагаемого в правой части уравнений (5.19) и (5.21), по координате.

Дифференциальное уравнение теплопроводности (5.17) в энергетической форме записи имеет вид:

$$\rho \frac{\partial(h)}{\partial \tau} = \text{div}(a \cdot \text{grad}(\rho h)) + q_v; \quad (5.23)$$

или с учетом соотношения  $\nabla(\rho h) = \nabla h'$

$$\frac{\partial(h')}{\partial \tau} = \text{div}(a \cdot \text{grad}(h')) + q_v, \quad (5.24)$$

где  $\nabla h$  – изменение удельной массовой энтальпии, Дж/кг;  
 $\nabla h'$  – изменение удельной объемной энтальпии, Дж/м<sup>3</sup>.

Каждое слагаемое дифференциального уравнения теплопроводности для расчета температуры (5.17) – (5.22) и

для расчета энтальпии (5.23) – (5.24) имеет размерность  $[\text{Дж}/(\text{с}\cdot\text{м}^3)] = [\text{Вт}/\text{м}^3]$ , то есть отражает баланс теплоты в элементарном объеме  $dV$  за бесконечно малое время  $dt$ .

Для тел, у которых объем незначительно изменяется с увеличением или уменьшением температуры, изменение удельной энтальпии приближенно равно изменению удельной тепловой внутренней энергии  $\nabla h \approx \nabla u$  и  $\nabla h' \approx \nabla u'$  элементарного объема тела.

### § 5.3.2. Частные случаи записи дифференциального уравнения Фурье

#### *А. Линейная форма записи дифференциального уравнения Фурье*

Дифференциальное уравнение теплопроводности в записи (5.17) – (5.22) является *нелинейным*, потому что коэффициент теплопроводности зависит от температуры  $\lambda = f(T)$  и поэтому стоит под знаком производной по координате. Точное аналитическое решение *нелинейного* дифференциального уравнения теплопроводности даже при линейных краевых условиях пока не найдено. Поэтому для упрощения решения краевой задачи теории теплопроводности принимают допущение о независимости коэффициента теплопроводности от температуры  $\lambda \neq f(T)$  и в этом случае получают *линейное* уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \text{div}(\text{grad}(T)) + \frac{q_v}{\rho c_p}$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T + \frac{q_v}{c_p}, \quad (5.25)$$

где  $a = \lambda / c_p'$  – коэффициент температуропроводности,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  
 $c_p$  – удельная массовая изобарная теплоемкость,  $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ;  
 $\rho c_p = c_p'$  – удельная объемная изобарная теплоемкость,  
 $\text{Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$ ;  $\text{div}(\text{grad}) = \nabla^2$  – оператор Лапласа, который эквивалентен последовательному взятию операций градиента и дивергенции;  $q_v$  – мощность внутренних источников или стоков теплоты,  $\text{Вт}/\text{м}^3$ .

Например, в декартовой системе координат уравнение (5.25) принимает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c_p}. \quad (5.26)$$

Решая *линейное* дифференциальное уравнение теплопроводности (5.26) с заданными *линейными* условиями однозначности находят трехмерное нестационарное температурное поле  $T(x, y, z, \tau)$ .

### ***Б. Дифференциальное уравнение Фурье для тел простой формы***

На начальном этапе изучения теплопроводности процессы переноса теплоты изучают на примере нагрева и охлаждения тел простой формы (бесконечная пластина, бесконечный цилиндр и шар или сфера) с постоянными физическими коэффициентами. Линейное дифференциальное уравнение теплопроводности для тел простой формы имеет вид:

– дивергентная форма записи

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{a}{x_1^{k-1}} \frac{d}{dx_1} \left( x_1^{k-1} \frac{dT}{dx_1} \right) + \frac{q_v}{c'_p}; \quad (5.27)$$

– обычная форма записи

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{k-1}{x_1} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{q_v}{c'_p}, \quad (5.28)$$

где  $x_1$  – первая координата в ортогональной системе координат:  $x_1 = x$  в декартовой системе координат,  $x_1 = r$  в цилиндрической и сферической системах координат;  $k$  – коэффициент формы тела:  $k = 1$  – бесконечная пластина;  $k = 2$  – бесконечный цилиндр;  $k = 3$  – шар.

**Замечание.** Так называемую обычную форму записи дифференциального уравнения теплопроводности получают дифференцированием произведения  $\left( x_1^{k-1} \frac{dT}{dx_1} \right)$  по координате в правой части уравнения (5.27).

Решая одномерное линейное дифференциальное уравнение теплопроводности (5.27) или (5.28) с заданными условиями однозначности находят одномерное нестационарное температурное поле  $T(x_1, \tau)$ .

Получим дифференциальное уравнение Фурье для тел *простой* формы без внутренних источников (стоков) теплоты в дивергентной и обычной форме записи, подставляя значение коэффициента формы  $k$  в уравнение (5.27) и уравнение (5.28):

– бесконечная пластина ( $k = 1$ )

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad (5.29)$$

– бесконечный цилиндр ( $k = 2$ )

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{a}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right); \quad (5.30)$$

– шар или сфера ( $k = 3$ )

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{a}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (5.31)$$

Форма записи дифференциального уравнения теплопроводности для бесконечной пластины в дивергентной и обычной форме записи совпадают.

### ***В. Дифференциальное уравнение Фурье для стационарного режима теплопроводности***

При неизменяющихся во времени условиях теплообмена на внешних границах тела, которые характеризуются неизменяющимися во времени температурами флюидов и постоянными коэффициентами теплоотдачи или неизменяющимися во времени температурами на поверхности тела, наступает *стационарный* режим теплопроводности, при котором температурное поле тела изменяется только по координате и не изменяется во времени. В этом случае  $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$  и дифференциальное уравнение теплопроводности в векторной форме записи (5.17) принимает вид уравнения Пуассона для стационарных процессов:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}(T)) + q_v = 0. \quad (5.32)$$

При допущении независимости коэффициента теплопроводности от температуры ( $\lambda = \text{const}$ ) получим линейное уравнение теплопроводности:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(T)) + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \Rightarrow \nabla^2 T + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (5.33)$$

При отсутствии в твердом теле источников или стоков теплоты ( $q_v = 0$ ) дифференциальное уравнение теплопроводности, моделирующее процесс распространения теплоты в стационарном режиме, принимает вид уравнения Лапласа:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}(T)) = 0 \quad (5.34)$$

При допущении независимости коэффициента теплопроводности от температуры ( $\lambda = \text{const}$ ) получим линейное уравнение теплопроводности:

$$\nabla^2 T = 0. \quad (5.35)$$

Запишем линейное дифференциальное уравнение теплопроводности для тел простой формы при наличии ( $q_v \neq 0$ ) и отсутствии ( $q_v = 0$ ) внутренних источников стоков) теплоты:

– уравнение Пуассона в дивергентной форме записи

$$\frac{1}{x_1^{k-1}} \frac{d}{dx_1} \left( x_1^{k-1} \frac{dT}{dx_1} \right) + \frac{q_v}{\lambda} = 0; \quad (5.36)$$

– уравнение Пуассона в обычной форме записи

$$\frac{d^2 T}{dx_1^2} + \frac{k-1}{x_1} \cdot \frac{dT}{dx_1} + \frac{q_v}{\lambda} = 0; \quad (5.37)$$

– уравнение Лапласа в дивергентной форме записи

$$\frac{1}{x_1^{k-1}} \frac{d}{dx_1} \left( x_1^{k-1} \frac{dT}{dx_1} \right) = 0; \quad (5.38)$$

– уравнение Пуассона в обычной форме записи

$$\frac{d^2T}{dx_1^2} + \frac{k-1}{x_1} \cdot \frac{dT}{dx_1} = 0, \quad (5.39)$$

где  $x_1$  – первая координата в ортогональной системе координат:  $x_1 = x$  в декартовой системе координат,  $x_1 = r$  в цилиндрической и сферической системах координат;  $k$  – коэффициент формы тела:  $k = 1$  – бесконечная пластина;  $k = 2$  – бесконечный цилиндр;  $k = 3$  – шар.

В результате решения одномерного дифференциального уравнения для стационарного процесса теплопроводности находят температурное поле в виде  $T(x_1)$  или  $T(x)$  – в декартовой системе координат и  $T(r)$  – в цилиндрической и сферической системах координат.

*Замечание.* Обратим внимание на то обстоятельство, что в дифференциальном уравнении стационарной теплопроводности для тел простой формы используют полные, а не частные производные, потому что искомая функция – температура зависит только от одного параметра – координаты  $T(x_1)$ .

### *Г. Безразмерная форма записи дифференциального уравнения Фурье*

Для распространения результатов решения краевой задачи теории теплопроводности (см. § 3.2.2.2) на группу подобных явлений (см. § 3.2.3) дифференциальное уравнение теплопроводности приводят к безразмерному виду.

Для тел простой формы безразмерное уравнение Фурье имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{k-1}{X} \frac{\partial \Theta}{\partial X} + \hat{Q}_v, \quad (5.40)$$

где  $\Theta$  – безразмерная температура;  $Fo = \frac{a\tau}{R^2}$  – критерий Фурье, который характеризует течение безразмерного

времени в процессе теплопроводности;  $X = \frac{x_1}{R}$  – безразмерная координата;  $R$  – размер расчетной области, м;  $x_1$  – первая координата в ортогональной системе координат:  $x_1 = x$  в декартовой системе координат,  $x_1 = r$  в цилиндрической и сферической системах координат;  $k$  – коэффициент формы тела;  $\hat{Q}_v$  – безразмерный источник или сток теплоты.

Формула для расчета безразмерной температуры  $\Theta$  зависит от условий теплообмена на границе тела. Если температурное поле тела стремится к равновесию с окружающей средой (граничные условия I рода и граничные условия III рода) безразмерную температуру задают в виде:

– граничные условия I рода

$$\Theta' = \frac{\theta'}{\theta'_0} = \frac{T_w - T}{T_w - T_0} = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}; \quad (5.41)$$

– граничные условия III рода

$$\Theta''' = \frac{\theta'''}{\theta'''_0} = \frac{T_f - T}{T_f - T_0} = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f}, \quad (5.42)$$

где  $\Theta'$  – безразмерная температура при граничных условиях I рода;  $\theta' = T_w - T$  или  $\theta' = T - T_w$  – избыточная температура при граничных условиях I рода, °С (К);  $\theta'_0 = T_w - T_0$  или  $\theta'_0 = T_0 - T_w$  – максимальный перепад температур (максимальная избыточная температура) при граничных условиях I рода, °С (К);  $\Theta'''$  – безразмерная температура при граничных условиях III рода;  $\theta''' = T_f - T$  или  $\theta''' = T - T_f$  – избыточная температура при граничных условиях III рода, °С (К);  $\theta'''_0 = T_f - T_0$  или  $\theta'''_0 = T_0 - T_f$  – максимальный перепад температур (максимальная избыточная температура) при граничных условиях III рода;  $T_0$  – начальная температура

тела, °C (K);  $T_f$  – температура окружающей тело среды, °C (K);  $T_w$  – температура поверхности тела, °C (K).

Безразмерная температура  $\Theta'$  и  $\Theta'''$  при граничных условиях I и III родов по своей структуре является *относительной избыточной* температурой.

**Замечание.** При *нагреве* температура тела изменяется в интервале  $T_0 \leq T \leq T_w$  при ГУ I рода и  $T_0 \leq T \leq T_f$  при граничных условиях III рода, а безразмерная температура при этом изменяется по закону  $1 \geq \Theta' \geq 0$  и  $1 \geq \Theta''' \geq 0$ , по которому при увеличении температуры тела его безразмерная температура уменьшается. Поэтому в расчетах теплопроводности при *нагреве* тел в качестве безразмерной температуры также используют выражение:

а) граничные условия I рода

$$\Theta^* = 1 - \Theta' = 1 - \frac{T_w - T}{T_w - T_0} = \frac{T - T_0}{T_w - T_0}; \quad (5.43)$$

б) граничные условия III рода

$$\Theta^* = 1 - \Theta''' = 1 - \frac{T_f - T}{T_f - T_0} = \frac{T - T_0}{T_f - T_0}. \quad (5.44)$$

При охлаждении температура тела изменяется в интервале  $T_0 \geq T \geq T_w$  при ГУ I рода и  $T_0 \geq T \geq T_f$  при ГУ III рода и безразмерная температура при этом  $1 \geq \Theta' \geq 0$  и  $1 \geq \Theta''' \geq 0$  тоже уменьшается.

При нагреве твердого тела постоянным тепловым потоком (граничное условие II рода) тепловое равновесие нагреваемого тела с окружающей средой отсутствует, потому что величина теплового потока, поступающего на тело, определяется электрическими, электромагнитными или ядерными полями, не зависящими от теплового состояния *окружения* тела. Поэтому нагрев тела постоянным тепловым потоком

(ГУ II рода) ограничивается только температурой, при которой твердое тело разрушается или изменяет свое фазовое состояние (расплавляется или переходит в газообразное состояние). В этом случае безразмерную температуру определяют по формуле:

$$\Theta'' = \frac{\theta''}{\theta_0''} = \frac{T - T_0}{\frac{q_w R}{\lambda_w}} = \frac{(T - T_0)\lambda_w}{q_w R}, \quad (5.45)$$

где  $\Theta''$  – безразмерная температура при граничных условиях II рода;  $\theta'' = T - T_0$  – избыточная температура при граничных условиях II рода, °С (К);  $\theta_0'' = q_w R / \lambda_w$  – комплекс, заменяющий максимальную избыточную температуру при граничных условиях II рода, °С (К);  $q_w$  – поверхностная плотность теплового потока, поступающего на тело, Вт/м<sup>2</sup>;  $R$  – размер расчетной области, м;  $\lambda_w$  – коэффициент теплопроводности твердого тела, Вт/(мК).

Безразмерный источник (сток) теплоты  $\hat{Q}_v$  при граничных условиях I и III рода получил имя критерия Померанцева, в честь российского советского теплофизика А.А. Померанцева:

– граничные условия I рода

$$Po = \hat{Q}'_v = \frac{q_v \cdot R^2}{\lambda} \cdot \left( \frac{1}{T_0 - T_w} \right); \quad (5.46)$$

– граничные условия III рода

$$Po = \hat{Q}'''_v = \frac{q_v \cdot R^2}{\lambda} \cdot \left( \frac{1}{T_0 - T_f} \right). \quad (5.47)$$

Безразмерный источник (сток) теплоты при граничных условиях II рода рассчитывают по формуле:

$$\hat{Q}_v'' = \frac{q_v \cdot R}{q_w}, \quad (5.48)$$

где  $q_v$  – мощность источника (стока) теплоты, Вт/м<sup>3</sup>;  $q_w$  – поверхностная плотность теплового потока, поступающего на тело, Вт/м<sup>2</sup>;  $R$  – размер расчетной области, м.

Решение дифференциального уравнения теплопроводности (5.40) с краевыми условиями, записанными в безразмерной форме, имеет вид  $\Theta(X, Fo)$ . Это решение показывает значение безразмерной температуры  $\Theta$  во всех точках пространства с безразмерной координатой  $X$  и во все безразмерные моменты времени  $Fo$ . Безразмерная температура для всех подобных процессов теплопроводности данного вида (в зависимости от условий однозначности) равна в точках с равными координатами  $X$  в одинаковые моменты времени  $Fo$ . Получив решение в общем виде  $\Theta(X, Fo)$ , температуру в градусах Цельсия или Кельвинах рассчитывают по формулам:

– граничные условия I рода

$$T = T_w - \Theta'(T_w - T_0); \quad (5.48,a)$$

– граничные условия III рода

$$T = T_f - \Theta'''(T_f - T_0); \quad (5.48,b)$$

– граничные условия II рода

$$T = T_0 + \Theta'' \cdot \frac{q_w R}{\lambda_w}, \quad (5.48,b)$$

## § 5.4. Условия однозначности, необходимые для решения дифференциального уравнения Фурье

Условия однозначности, задаваемые для решения внутренней и внешней *дифференциальной* задачи тепломассообмена, рассмотрены в разделе § 3.2.2 учебника. Дифференциальное уравнение теплопроводности, как и все дифференциальные уравнения, имеет бесчисленное множество решений. Для выделения единственного *решения* дифференциального уравнения Фурье для конкретного явления теплопроводности необходимо задать (назначить) условия однозначности. Дифференциальное уравнение теплопроводности вместе с известными условиями однозначности называют *краевой задачей теории теплопроводности* (КЗТТ).

Условия однозначности включают в себя:

1. Размеры расчетной области:

- геометрические размеры и форма тела;
- время нагрева или охлаждения тела для нестационарного процесса, заданное в явном или неявном виде по дополнительному условию. Например, расчет температурного поля требуется выполнять до достижения заданной температуры на поверхности тела или до наступления теплового равновесия тела с окружающей средой.

2. Физические свойства вещества – коэффициент теплопроводности ( $\lambda$ ), удельная объемная теплоемкость ( $c'$ ) или удельная массовая теплоемкость ( $c$ ), плотность ( $\rho$ ), коэффициент температуропроводности ( $a$ ).

3. Закон распределения внутренних источников теплоты в заданной расчетной области тела  $q_v(x_1, \tau)$ . В частном случае при отсутствии внутренних источников  $q_v = 0$ .

4. Краевые условия (КУ), которые включают в себя начальное условие (НУ) теплообмена, задаваемые только для нестационарных процессов, и граничные условия (ГУ)

теплообмена на геометрических границах заданной расчетной области (см. § 3.2.2).

### § 5.4.1. Начальное условие (НУ)

Перед началом расчета *нестационарной* теплопроводности необходима информация о распределении температуры в объеме тела в некоторый момент времени, принимаемый за начало отсчета, или *начальный* момент времени (момент времени  $\tau = 0$ ). В начальный момент времени должна быть задана функция:

$$T(x_i, \tau = 0) = T_0(x_i) \quad \text{или} \quad T(x_i, 0) = T_0(x_i), \quad (5.49)$$

где  $x_i = x_1, x_2, x_3$  – ортогональная система координат (см. § 1.1);  $\tau$  – время;  $T_0$  – начальная температура.

В частном случае, при одинаковой температуре по всему объему тела в *начальный* (нулевой) момент времени начальное условие принимает вид:

$$T(x_i, 0) = T_0 = \text{пост} \quad (5.50,а)$$

или для тел простой формы

$$T(x_1, 0) = T_0 = \text{пост}, \quad (5.50,б)$$

где  $x_1$  – первая координата в ортогональной системе координат:  $x_1 = x$  в декартовой системе координат,  $x_1 = r$  в цилиндрической и сферической системах координат.

Безразмерная форма записи начального условия для тел простой формы зависит от формулы расчета безразмерной температуры  $\Theta'$ ,  $\Theta''$  и  $\Theta'''$ . Заменяя в формулах (5.41), (5.42) и (5.45) температуру  $T$  на температуру  $T_0$ , получим:

– при граничных условиях I и III рода

$$\Theta'_0 = \frac{T_w - T_0}{T_w - T_0} = 1; \quad \Theta''' = \frac{T_f - T_0}{T_f - T_0} = 1; \quad (5.51,а)$$

– при граничных условиях II рода

$$\Theta''_0 = \frac{T_0 - T_0}{\frac{q_w R}{\lambda}} = 0. \quad (5.51,б)$$

Ещё раз отметим, что для задач *стационарной* теплопроводности, при которой температурное поле не зависит от времени, задание начального условия не имеет смысла, потому что начальное распределение температуры по сечению тела не влияет на стационарное температурное поле.

### § 5.4.2. Граничные условия (ГУ)

В расчетах теплообмена применяют четыре типа граничных условий, которые называют *родами* (см. § 3.2.2). Граничные условия теплообмена необходимо задавать как на внешней поверхности тела (внешние ГУ), так и, при расположении границы расчетной области внутри тела, на внутренней границе (внутренние ГУ).

Граничные условия *первого* и *второго* родов могут быть внешними и внутренними, а граничные условия *третьего* рода – только внешними граничными условиями.

Граничные условия *четвертого* рода для решения задачи теплопроводности в составных телах являются *внутренними* граничными условиями для системы твердых тел.

Граничные условия четвертого рода для решения *внешней* задачи теплообмена, задаваемые на границе контакта текучей среды с твердым телом, являются *внешними* граничными условиями для расчетной области конвективного теплообмена. Граничные условия четвертого рода для

решения *внешней* задачи теплообмена рассмотрены в третьей главе учебника.

### § 5.4.2.1. Граничные условия первого рода

Граничные условия *первого рода* (ГУ I род) задают значение температуры на границе расчетной области и закон ее изменения во времени:

$$T|_w = T_w(\tau); \quad (5.52,а)$$

$$T|_x = T_{w,x}(\tau), \quad (5.52,б)$$

где  $\tau = 0 \div \tau_k$  – текущее время процесса теплопроводности;  $\tau_k$  – время нагрева или охлаждения твердого тела; символ  $|_w$  обозначает внешнюю границу твердого тела;  $T_w$  – температура на внешней границе тела; символ  $|_x$  обозначает внутреннюю границу твердого тела с координатой  $x$ ;  $T_{w,x}$  – температура на внутренней границе расчетной области в точке с координатой  $x$ .

Физический смысл граничных условий первого рода заключается в том, что температура на границах расчетной области тела с начальной температурой  $T_0$  в нулевой момент времени *мгновенно* изменяется на внешней границе до температуры  $T_w$  и на внутренней границе до температуры  $T_{w,x}$ . В практике теплотехнических расчетов ГУ I рода задают в том случае, если время изменения температуры тела от начальной  $T_0$  до температуры на границе расчетной области  $T_w$  или до температуры в точке с координатой  $x$  –  $T_{w,x}$ , много меньше времени нагрева или охлаждения тела.

Подчеркнем ещё раз, что при граничных условиях

первого рода в начальный момент времени ( $\tau = 0$ ) на внешней поверхности тела или в точке с координатой  $x$  температура *не равна*  $T_0$ , а равна  $T_w$  или  $T_{w,x}$  соответственно.

В частном случае температура на границе расчетной области после мгновенного изменения от начальной температуры  $T_0$  до температуры  $T_w$  может оставаться неизменной во времени:

$$T|_w = T_w = \text{пост.} \quad (5.53)$$

При *симметричном* нагреве или охлаждении тела простой формы (геометрический размер расчетной области равен  $R$ ) граничные условия первого рода имеют вид:

$$T(R, \tau) = T_w = \text{пост.}, \quad (5.54)$$

где  $\tau \geq 0$  – время процесса теплопроводности.

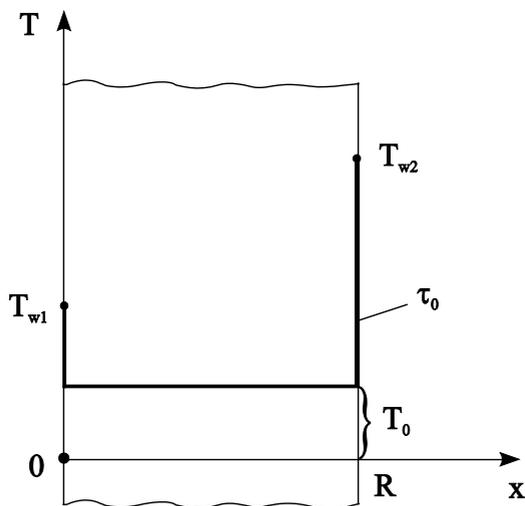


Рис. 5.2. Температура на границах тела при ГУ I рода (несимметричный нагрев)

При *несимметричном* нагреве бесконечной пластины с координатами расчетной области  $x = 0$  и  $x = R$  и при постоянных температурах  $T_{w1}$  и  $T_{w2}$  на ее границах (рис. 5.2), граничные условия I рода записывают в виде:

$$T(0, \tau) = T_{w1} = \text{пост} ; \quad T(R, \tau) = T_{w2} = \text{пост} ,$$

где  $\tau \geq 0$  – время процесса теплопроводности.

### § 5.4.2.2. Граничные условия второго рода

Граничные условия *второго рода* (ГУ II род) задают тепловой поток (поверхностную плотность теплового потока) на границе расчетной области. На внешней границе тела:

$$q|_w = q_w(\tau), \quad (5.55)$$

где символ  $|_w$  обозначает внешнюю границу твердого тела;  $q|_w$  – плотность теплового потока, отводимого от наружной границы внутрь твердого тела при нагреве (рис. 5.3) или приходящего на поверхность из внутренних слоев тела при его охлаждении;  $q_w(\tau)$  – плотность теплового потока, поступающего на поверхность твердого тела при нагреве или отводимого от поверхности тела при охлаждении в зависимости от времени.

Равенство тепловых потоков (5.55) записано на основе закона сохранения энергии и поэтому выражает тепловой баланс на поверхности тела.

Применяя для расчета плотности теплового потока  $q|_w$ , отводимого от наружной границы внутрь твердого тела при нагреве, основной закон Фурье для тел простой формы (3.16), граничные условия II рода можно записать в виде:

$$\underbrace{\lambda_w \frac{\partial T}{\partial x_1} \Big|_w}_{\text{закон Фурье}} = q_w(\tau), \quad (5.56)$$

где  $\tau > 0$  – время процесса теплопроводности;  $x_1$  – первая координата в ортогональной системе координат:  $x_1 = x$  в декартовой системе координат,  $x_1 = r$  в цилиндрической и сферической системах координат.

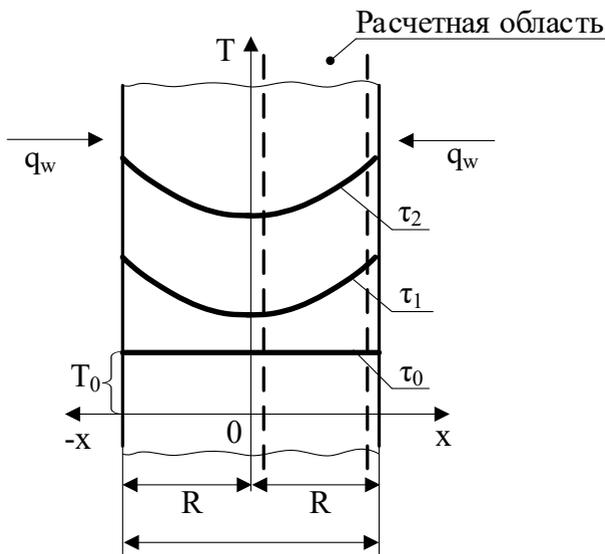


Рис. 5.3. Температурное поле в пластине при ГУ II рода

В частном случае тепловой поток (плотность теплового потока  $q_w$ ) не изменяется с течением времени:

$$\lambda_w \frac{\partial T}{\partial x_1} \Big|_w = q_w = \text{пост.} \quad (5.57)$$

Например, для графика симметричного нагрева бесконечной пластины постоянным тепловым потоком  $q_w$ ,

показанного на рис. 5.3, расчетную область принимают равной половине толщины пластины. И в этом случае граничные условия второго рода записывают формулами:

– на *внешней* границе тела в точке  $x = R$

$$\lambda_w \left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_{x_1=R} = q_w ; \quad (5.58)$$

– на *внутренней* границе расчетной области в точке  $x_1 = 0$  существует экстремум функции  $T(x)$  и поэтому

$$q \Big|_{x_1=0} = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = 0 , \quad (5.59)$$

где для бесконечной пластины первая координата в ортогональной системе координат равна  $x_1 = x$ .

Получим безразмерную форму записи граничных условий II рода. Для этого используем безразмерную координату  $X = \frac{x_1}{R}$ , где  $R$  – масштаб длины, равный размеру расчетной области. Подставим значение координаты  $x_1 = X \cdot R$  в формулу (5.57) и получим:

$$\lambda_w \left. \frac{\partial T}{\partial (XR)} \right|_w = q_w \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_w = \frac{q_w R}{\lambda_w}$$

Разделим левую и правую части последнего уравнения на постоянную величину  $\frac{q_w R}{\lambda_w}$  и окончательно получим:

$$\left. \frac{\partial \left( \frac{T - T_0}{q_w R / \lambda_w} \right)}{\partial X} \right|_w = 1 \Rightarrow \left. \frac{\partial \Theta''}{\partial X} \right|_w = 1, \quad (5.60)$$

где  $\Theta'' = \frac{(T - T_0)\lambda_w}{q_w R}$  – безразмерная температура при граничных условиях второго рода (см. формулу (5.45));  $T_0$  – начальная температура тела (постоянная величина), введение которой под знак дифференциала не изменяет результата дифференцирования.

### § 5.4.2.3. Граничные условия третьего рода

Граничные условия *третьего рода* (ГУ III род) задают температуру внешней среды, окружающей тело, и закон теплообмена между средой (окружением) и поверхностью тела (см. § 3.2.2.2). Случай теплообмена на границе твердого тела, который описывают граничные условия III рода, наиболее часто встречается на практике. В качестве закона теплообмена между окружающей тело средой и поверхностью тела, как правило, в инженерных расчетах используют закон теплоотдачи – закон Ньютона:

$$q|_w = \alpha \cdot |\Delta T| \Rightarrow \lambda_w |\nabla T| = \alpha \cdot |\Delta T|, \quad (5.61)$$

где символ  $|_w$  обозначает внешнюю границу твердого тела;  $q|_w = \lambda_w |\nabla T|$  – плотность теплового потока, отводимого от наружной границы внутрь твердого тела при нагреве (рис. 5.4) или приходящего на поверхность из внутренних слоев тела при его охлаждении;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи;  $|\Delta T| = |T_f - T_w|$  – перепад температур между окружением и

поверхностью тела;  $T_f$  – температура окружающей среды;  $T_w$  – температура поверхности тела. Вспомним, что в общем случае теплоотдача между поверхностью твердого тела и окружающей средой происходит конвекцией и излучением (см. § 1.6).

На рис. 5.4 показан график изменения температурного поля бесконечной пластины при её нагреве в среде с температурой  $T_f$  и известным коэффициентом теплоотдачи  $\alpha$ . Точку А, отстоящую от поверхности пластины на расстояние  $x_0 = \lambda / \alpha$  называют *направляющей* точкой, потому что штриховые линии, построенные из этой точки, являются касательными к температурным кривым на поверхности тела. Направляющая точка имеет чисто геометрический смысл для построения температурного поля в твердом теле. При этом изменение температуры флюида от температуры окружающей среды  $T_f$  до температуры на поверхности тела  $T_w$  происходит в узкой области теплового пограничного слоя  $\delta_{\text{тпс}}$ .

Граничные условия III рода при симметричном нагреве и охлаждении тел простой формы моделируются формулами (3.19) и (3.20), полученными в третьей главе учебника (см. § 3.2.2.2):

– нагрев

$$\lambda_w \left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_w = \alpha \cdot (T_f - T_w);$$

– охлаждение

$$-\lambda_w \left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_w = \alpha \cdot (T_w - T_f).$$

Получим безразмерную форму ГУ III рода, используя приведение к безразмерному виду (см. § 3.2.3.2) формулу (3.19). Для этого используем безразмерную координату  $X = \frac{x_1}{R}$ , где  $R$  – масштаб длины, равный размеру расчетной области. Подставим значение координаты  $x_1 = X \cdot R$  в формулу ГУ III рода при нагреве тела и получим:

$$\lambda_w \frac{\partial T}{\partial (XR)} \Big|_w = \alpha \cdot (T_f - T_w) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial X} \Big|_w = \frac{\alpha R}{\lambda_w} \cdot (T_f - T_w).$$

Далее разделим левую и правую части последнего уравнения на постоянную величину  $(T_f - T_0)$

$$-\frac{\partial \left( \frac{T_f - T}{T_f - T_0} \right)}{\partial X} \Big|_w = \frac{\alpha R}{\lambda_w} \cdot \frac{(T_f - T_w)}{T_f - T_0}$$

или с учетом значения безразмерной температуры при ГУ III рода  $\Theta''' = \frac{T_f - T}{T_f - T_0}$  и  $\Theta'''_w = \frac{T_f - T_w}{T_f - T_0}$  (см. формулу (5.45))

и критерия Био  $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda_w}$ , окончательно получим формулу граничных условий III рода в безразмерной форме записи:

$$-\frac{\partial \Theta'''}{\partial X} \Big|_w = Bi \cdot \Theta'''_w. \quad (5.62)$$

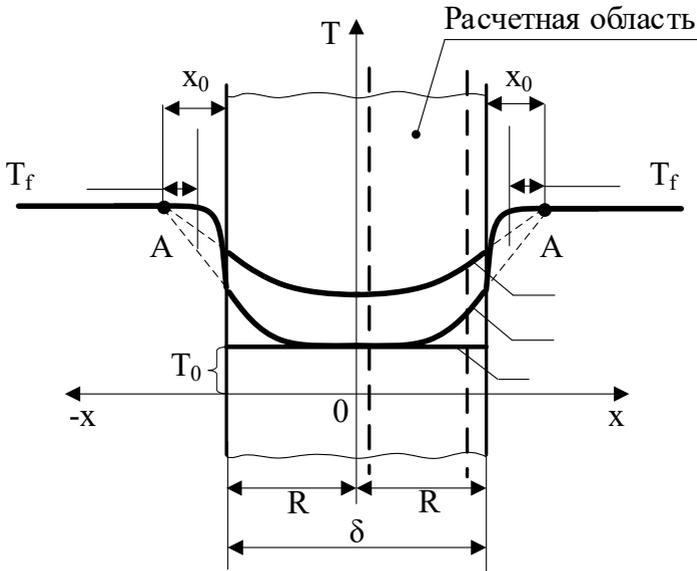


Рис. 5.4. Температурное поле в пластине при ГУ III рода

Критерий Био – безразмерный коэффициент теплоотдачи – *определяющий* критерий в задачах теплопроводности, который назван в честь французского ученого Жан–Батиста Био (Jean-Baptiste Biot). От величины критерия Био зависит интенсивность процесса теплопроводности в твердом теле. Физический смысл критерия Био можно раскрыть, записав его в виде:

$$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda_w} = \frac{\alpha}{(\lambda_w / R)} \quad (5.63)$$

или

$$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda_w} = \frac{(R / \lambda_w)}{(1 / \alpha)}. \quad (5.64)$$

Анализируя формулу (5.63), можно сделать вывод о том, что критерий Био характеризует отношение интенсивности *внешнего* теплообмена, которая зависит от коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  к интенсивности *внутреннего* теплообмена, которая зависит от тепловой проводимости – отношения  $(\lambda/R)$ . С другой стороны, как это показывает формула (5.64), критерий Био характеризует отношение термического сопротивления теплопроводности  $(R/\lambda)$  к термическому сопротивлению теплоотдачи  $(1/\alpha)$ .

#### § 5.4.2.4. Граничные условия четвертого рода для решения задачи теплопроводности

Граничные условия *четвертого рода* (ГУ IV род) при решении задач *теплопроводности* задают условия теплообмена на границе контакта двух твердых тел, состоящих из разного вещества с разными физическими свойствами. В этом случае в зоне *идеального* контакта у обоих твердых тел равны температуры и тепловые потоки (рис. 5.5,а):

$$T_I|_w = T_{II}|_w; \quad q_I|_w = q_{II}|_w; \quad (5.65)$$

или, используя закон Фурье для расчета плотности теплового потока, можно записать:

$$T_I|_w = T_{II}|_w; \quad \lambda_I \frac{\partial T_I}{\partial x} \Big|_w = \lambda_{II} \frac{\partial T_{II}}{\partial x} \Big|_w, \quad (5.66)$$

где  $T_I$ ,  $T_{II}$  – температура первого и второго тела;  $T_I|_w$ ,  $T_{II}|_w$  – температура первого и второго тела на границе идеального контакта;  $\lambda_I$ ,  $\lambda_{II}$  – коэффициенты теплопроводности первого и второго тела.

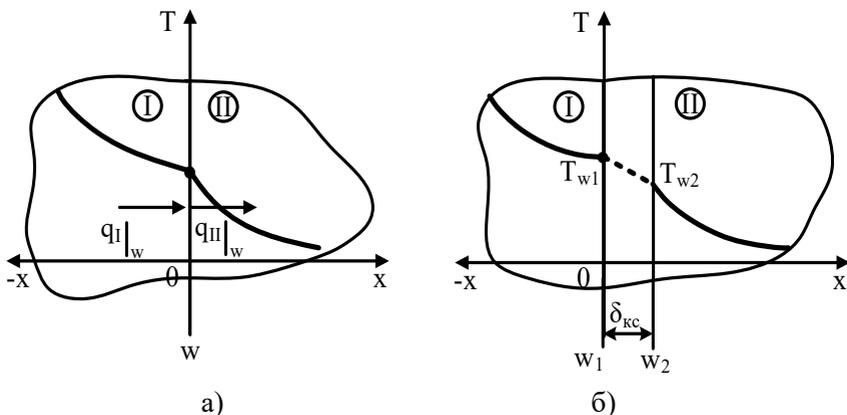


Рис. 5.5. Температурное поле при ГУ IV рода:  
 а – идеальный контакт; б – неидеальный контакт

Если между твердыми телами существует контактный слой толщиной  $\delta_{\text{кc}}$ , заполненный веществом с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_{\text{кc}}$ , то в этом случае контакт *неидеальный* и, при допущении квазистационарного процесса теплопроводности в неподвижном контактном слое, граничные условия IV рода записывают в виде (рис. 5.5,б):

$$\lambda_{\text{I}} \left. \frac{\partial T_{\text{I}}}{\partial x} \right|_{w_1} = \frac{\lambda_{\text{кc}}}{\delta_{\text{кc}}} (T_{w1} - T_{w2}) = \lambda_{\text{II}} \left. \frac{\partial T_{\text{II}}}{\partial x} \right|_{w_2}, \quad (5.67)$$

где  $T_{w1}$  и  $T_{w2}$  – температуры на границах неидеального контакта.

**Замечание.** В общем случае ширина зоны контакта двух твердых тел является переменной по их длине, а флюид, заполняющий контактную зону, изменяет свое теплосодержание в нестационарных процессах, поэтому термическое сопротивление контакта является переменным. Задачи теплообмена при ГУ IV рода с неидеальным контактом двух твердых тел решают методами

математического моделирования при помощи современных программно-вычислительных комплексов.

## **§ 5.5. Нестационарная теплопроводность в телах простой формы**

### **§ 5.5.1. Математическая формулировка задачи**

Температурное поле в телах простой формы при нагреве или охлаждении находят решением краевой задачи теории теплопроводности (КЗТТ), которая включает в себя дифференциальное уравнение теплопроводности и условия однозначности. Линейное дифференциальное уравнение теплопроводности для тел простой формы при отсутствии внутренних источников (стоков) теплоты имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{k-1}{x_1} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_1} \right), \quad (5.68)$$

где где  $x_1$  – первая координата в ортогональной системе координат:  $x_1 = x$  в декартовой системе координат,  $x_1 = r$  в цилиндрической и сферической системах координат;  $k = 1, 2$  или  $3$  – коэффициент формы тела:  $k = 1$  – бесконечная пластина;  $k = 2$  – бесконечный цилиндр;  $k = 3$  – шар.

Для задания условий однозначности рассмотрим процесс симметричного нагрева тела простой формы с равномерным начальным распределением температуры по сечению тела. Температурное поле будем находить в расчетной области, ограниченной осью симметрии тела и его внешней границей (см. рис. 5.1). Для выделения единственного решения данного уравнения зададим условия однозначности (см. § 5.4):

– геометрический размер расчетной области для бесконечной пластины  $R = \delta/2$ , где  $\delta$  – толщина пластины; геометрический размер расчетной области для бесконечного

цилиндра  $R = r_{\text{ц}}$ ; геометрический размер расчетной области для шара  $R = r_{\text{ш}}$ ;

- время нагрева или охлаждения твердого тела  $\tau_k$ ;
- теплофизические свойства материала тела  $a$  и  $\lambda$ ;
- внутренние источники теплоты отсутствуют  $q_v = 0$ ;
- начальное условие (см. формулу (5.50,б))

$$T(x_1, 0) = T_0 = \text{пост.}$$

- граничные условия:

а) на внутренней границе в точке  $x_1 = 0$  из условия симметрии температурного поля следует, что (см. формулу (5.59)):

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = 0;$$

б) на внешней границе тела зададим граничные условия I, II и III родов.

Граничное условие I рода при симметричном нагреве и постоянной температуре поверхности  $T_w$  имеет вид (см. формулу (5.54)):

$$T(R, \tau) = T_w = \text{пост.},$$

где  $\tau \geq 0$  – время процесса теплопроводности;

Граничное условие II рода на поверхности тела при симметричном нагреве постоянным тепловым потоком с поверхностной плотностью  $q_w$  задают формулой (5.58):

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_{x=R} = q_w = \text{пост.}$$

При граничном условии III рода теплообмен на поверхности тела определяется температурой окружающей среды

$T_f$  и коэффициентом теплоотдачи  $\alpha$ . Например, при нагреве тела простой формы ГУ III рода задают выражением (3.19):

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} \Big|_{x=R} = \alpha(T_f - T_w).$$

В результате решения краевой задачи нестационарной теплопроводности находят температурное поле  $T(x_1, \tau)$ , изменяющееся в пространстве и во времени.

В безразмерном виде математическая формулировка краевой задачи теории теплопроводности в нестационарном режиме теплообмена и без внутренних источников теплоты включает в себя следующие уравнения:

– дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{k-1}{X} \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \quad (5.69)$$

где  $Fo$  – критерий Фурье;  $X$  – безразмерная координата;  $\Theta$  – безразмерная температура, рассчитываемая при ГУ I рода ( $\Theta'$ ) по формуле (5.41), при ГУ III рода ( $\Theta'''$ ) по формуле (5.42) и при ГУ II рода ( $\Theta''$ ) по формуле (5.45);

– начальное условие по формулам (5.51,а) и (5.51,б)

$$\Theta'_0 = 1; \quad \Theta''_0 = 1; \quad \Theta'''_0 = 0; \quad (5.70)$$

– граничное условие в тепловом центре (на внутренней границе) расчетной области в точке  $X = 0$  имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial X} \Big|_{X=0} = 0; \quad (5.71)$$

– граничное условие на внешней границе в точке  $X = 1$  для трех родов граничных условий задают формулами:

– ГУ I рода

$$\Theta'(1, Fo) = \frac{T_w - T_w}{T_w - T_0} = 0; \quad (5.72)$$

– ГУ II рода

$$\left. \frac{\partial \Theta''}{\partial X} \right|_{X=1} = 1; \quad (5.73)$$

– ГУ III рода

$$\left. - \frac{\partial \Theta'''}{\partial X} \right|_{X=1} = Bi \cdot \Theta''_w. \quad (5.74)$$

Точные аналитические решения нестационарной краевой задачи теории теплопроводности для тел простой формы при граничных условиях I, II и III родов приведены в методических указаниях [39].

### **§ 5.5.2. Графическое представление температурного поля при граничных условиях I, II и III родов в телах простой формы**

Информация о качественном изменении температуры тела в пространстве и времени при его нагреве или охлаждении, в зависимости от заданных граничных условий, ещё до выполнения расчета позволяет прогнозировать тепловое состояние тела.

Рассмотрим особенности развития температурного поля в пространстве и времени в телах *простой формы* в процессе теплопроводности на примере нагрева *бесконечной пластины*.

#### **§ 5.5.2.1. Температурное поле при граничных условиях I рода**

Температурное поле бесконечной пластины толщиной  $\delta = 0,2$  м, выполненной из стали, при мгновенном

изменении температуры на поверхности тела от начальной температуры  $T_0$  до температуры  $T_w$  (граничные условия I рода) показано на рис. 5.6.

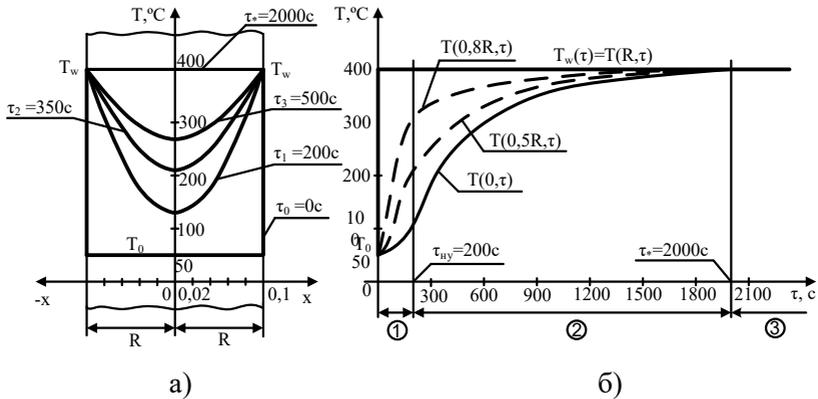


Рис. 5.6. Температурное поле бесконечной пластины при граничных условиях I рода ( $\lambda = 40$  Вт/(мК);  $a = 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с):  
 а – изменение температуры по сечению тела;  
 б – изменение температуры пластины во времени в точках с координатами:  $x=R$  (поверхность тела),  $x=0,8R$ ,  $x=0,5R$ ,  $x=0$  (тепловой центр тела)

На рис. 5.6,а представлено изменение температуры по сечению пластины в пять моментов времени:

– в начальный момент времени  $\tau = 0$  [ $T(0 \leq x < R, \tau = 0) = T_0$ ;  $T(R, \tau = 0) = T_w$ ];

– в три момента времени нагрева  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_3$  [ $T(x, \tau_1)$ ,  $T(x, \tau_2)$  и  $T(x, \tau_3)$ ], где  $0 \leq x < R$ ;

– в момент времени  $\tau_*$ , при котором наступает режим *теплового равновесия* (см. рис. 5.6,б) и температурное поле

по всему объему пластины *равно*  $T(x, \tau) = T_w = \text{пост}$ , где  $0 \leq x \leq R$  и  $\tau \geq \tau_*$ .

На рис. 5.6,б показано изменение температуры во времени на поверхности пластины  $x = R - T(R, \tau)$ , в тепловом центре пластины  $x = 0 - T(0, \tau)$  и в точках с координатами  $x = 0,8R - T(0,8R; \tau)$  и  $x = 0,5R - T(0,5R; \tau)$ . Анализируя изменение температуры во времени на рис. 5.6,б можно выделить *три* периода нагрева.

В *первом* периоде (участке, режиме) нагрева температурное поле тела зависит от начального распределения температуры по сечению тела (начального условия).

На *втором* временном участке нагрева развитие температурного поля в пространстве и времени не зависит от начального распределения температуры и наступает *установившийся* режим теплопроводности.

*Третий* период теплового состояния тела – режим *теплового равновесия* – наступает в конце второго периода нагрева (в момент времени  $\tau_*$ ). Тепловое равновесие тела – это состояние, при котором температура тела по всему объему равна температуре поверхности тела  $T_w$  и не изменяется во времени.

Режим нагрева, при котором температурное поле тела не зависит от начального распределения температуры по сечению тела, называют *установившимся* режимом (второй временной участок на рис. 5.6,б). Момент времени, при котором режим нагрева/охлаждения можно считать установившимся (начало второго периода нагрева), зависит от формы тела (бесконечная пластина, бесконечный цилиндр или шар) и рода граничных условий.

Например, температурное поле при нагреве или охлаждении бесконечной пластины при граничных условиях первого рода начиная с момента времени  $Fo > 0,06$  с

погрешностью менее 10% и с момента времени  $Fo > 0,2$  с погрешностью менее 2% не зависит от начального распределения температуры по сечению тела и с этого момента времени наступает установившийся режим теплопроводности [8].

**Замечание.** Режимом нагрева или охлаждения твердого тела в теплотехнике называют изменение температуры тела во времени (нестационарное температурное поле). При этом в качестве основных характеристик режима нагрева рассматривают изменение температуры на поверхности  $T(R, \tau)$  и в тепловом центре тела  $T(0, \tau)$ , а также максимальный перепад температур по сечению тела  $\Delta T(\tau) = T(R, \tau) - T(0, \tau)$  [8].

При симметричном нагреве или охлаждении тел простой формы начало координат устанавливают в тепловом центре, который расположен в средней плоскости бесконечной пластины, на оси бесконечного цилиндра и в центре шара.

### **§ 5.5.2.2. Температурное поле при граничных условиях II рода**

Температурное поле при поступлении на поверхность бесконечной пластины постоянного теплового потока (ГУ II рода) показано на рис. 5.7.

При нагреве постоянным тепловым потоком существуют только *два* периода нагрева (см. рис. 5.7,б). В первом периоде (участке) нагрева температурное поле тела, как и при граничных условиях первого рода, в значительной степени зависит от начального распределения температуры (начального условия).

На втором временном участке, который при ГУ II рода начинается с момента времени  $Fo \geq 1 / (2k)$ , где  $k$  – коэффициент формы тела, развитие температурного поля не зависит от начального температурного поля и наступает *установившийся* режим теплопроводности. Этот период установившегося развития температурного поля при граничных

условиях II рода называют *квазистационарным* режимом нагрева.

Температурные кривые по сечению тела при квазистационарном режиме нагрева являются эквидистантными (подобными) друг другу (см. рис. 5.7,а).

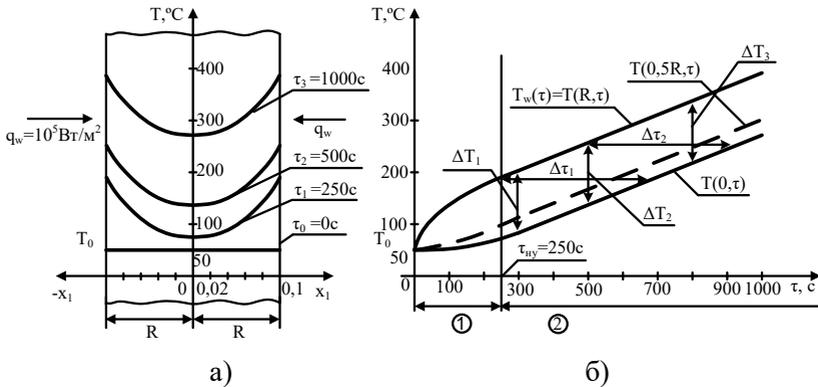


Рис. 5.7. Температурное поле бесконечной пластины при граничных условиях II рода ( $\lambda = 40$  Вт/(мК);  $a = 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с):

а – изменение температуры по сечению тела;

б – изменение температуры во времени в точках с координатами:  $x = R$  (поверхность тела),  $x = 0,5R$ ,  $x = 0$  (тепловой центр тела)

**Замечание.** Режимы нагрева бесконечного цилиндра и шара при граничных условиях II рода по форме аналогичны режиму нагрева бесконечной пластины и отличаются при одинаковых условиях однозначности только количественно в зависимости от коэффициента формы тела простой формы.

Для расчета температурного поля  $T(x_1, \tau)$  в телах простой формы при граничных условиях II рода краевая задача теории теплопроводности в *размерной* форме записи

формулируется дифференциальным уравнением теплопроводности (5.68) и краевыми условиями (5.50), (5.58) и (5.59).

Для расчета *безразмерного* температурного поля  $\Theta''(X, Fo)$  в телах простой формы при граничных условиях II рода необходимо решить дифференциальное уравнение теплопроводности (5.69) совместно с краевыми условиями (5.70), (5.71) и (5.73).

Решение краевой задачи теории теплопроводности (КЗТТ) при граничных условиях второго рода для всех трех тел простой формы при квазистационарном режиме нагрева, который наступает в момент времени  $Fo = 1/(2k)$ , имеет вид [8]:

$$\Theta''(X, Fo) = k \cdot Fo + \frac{X^2}{2} - \frac{k}{2(k+2)}, \quad (5.75)$$

где  $\Theta'' = \frac{(T - T_0)\lambda_w}{q_w R}$  – безразмерная температура при гра-

ничных условиях второго рода;  $T_0$  – начальная температура тела, °С (К);  $q_w$  – поверхностная плотность теплового потока, поступающего на тело, Вт/м<sup>2</sup>;  $R$  – размер расчетной области, м;  $\lambda_w$  – коэффициент теплопроводности твердого тела, Вт/(мК);  $X = x_1 / R$  – безразмерная координата ( $0 \leq X \leq 1$ );  $x_1$  – размерная координата ( $0 \leq x_1 \leq R$ ), м;  $Fo = at / R^2$  – критерий Фурье (безразмерное время);  $a$  – коэффициент температуропроводности, м<sup>2</sup>/с;  $t$  время нагрева, с;  $k$  – коэффициент формы тела.

Подставляя значение коэффициента формы  $k$  для тел простой формы в уравнение (5.75) получим формулы для расчета температурного поля при нагреве тепловым потоком  $q_w$  для всех трех тел простой формы:

– бесконечная пластина  $k = 1$

$$\Theta''(X, Fo) = Fo + \frac{X^2}{2} - \frac{1}{6}; \quad (5.76)$$

– бесконечный цилиндр  $k = 2$

$$\Theta''(X, Fo) = 2 \cdot Fo + \frac{X^2}{2} - \frac{1}{4}; \quad (5.77)$$

– шар (сфера)  $k = 3$

$$\Theta''(X, Fo) = 3 \cdot Fo + \frac{X^2}{2} - \frac{3}{10}. \quad (5.78)$$

Рассчитав безразмерную температуру  $\Theta''(X, Fo)$  в точке  $X$  в момент времени  $Fo$ , температуру  $T(x_1, \tau)$  в точке  $x_1 = X \cdot R$  в момент времени ( $\tau = Fo \cdot R^2 / a$ ) находят по формуле:

$$T = T_0 + \Theta'' \cdot \frac{q_w R}{\lambda_w}. \quad (5.79)$$

Анализ формулы (5.75) показывает, что при квазистационарном режиме нагрева температура по сечению тела простой формы изменяется по параболическому закону и в каждой точке тела линейно изменяется во времени. При этом из формулы (5.75) следует, что максимальный перепад температур по сечению тела равен:

$$\Delta \Theta'' = \Theta''(1, Fo) - \Theta''(0, Fo) = \frac{1}{2} \quad (5.80)$$

или в размерном виде

$$\Delta T = T(R, \tau) - T(0, \tau) = \frac{q_w R}{2\lambda} \quad (5.81)$$

и остается постоянным в процессе нагрева (см. рис. 5.7). При этом величина перепада температур по сечению тела простой формы не зависит от его формы.

При *квазистационарном* режиме нагрева остается постоянным и время отставания (время запаздывания) температуры – время, через которое температура в тепловом центре становится равной температуре на поверхности тела  $T(0, \tau) = T(R, \tau)$  (см. рис. 5.7). Приравнивая безразмерные температуры на поверхности  $\Theta''(1, Fo_1)$  в момент времени  $Fo_1$  и в тепловом центре  $\Theta''(0, Fo_2)$  в момент времени  $Fo_2$  из формулы (5.75), получим:

$$k \cdot Fo_1 + \frac{1}{2} - \frac{k}{2(k+2)} = k \cdot Fo_2 - \frac{k}{2(k+2)},$$

откуда следует, что безразмерное время запаздывания равно

$$\Delta Fo = Fo_2 - Fo_1 = \frac{1}{2k} \quad (5.82)$$

или в размерном виде

$$\frac{a\Delta\tau}{R^2} = \frac{1}{2k} \Rightarrow \Delta\tau = \frac{R^2}{2ak}, \quad (5.83)$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности;  $k$  – коэффициент формы тела;  $R$  – размер расчетной области.

Анализ графиков на рис. 5.7 показывает, что при нагреве постоянным тепловым потоком отсутствует период теплового равновесия тела с окружающей средой, что приводит при превышении допустимых температур для данного материала к разрушению твердых тел.

**Замечание.** Нагрев твердого тела тепловым потоком, который не зависит от температурного поля нагреваемого тела, можно осуществить преобразованием электрической формы

энергии в теплоту, за счет тепловыделения на границе тела под действием электромагнитного поля и при протекании ядерной реакции.

Отвод теплоты постоянным тепловым потоком, который не зависит от температуры охлаждающей тело среды, технически осуществить невозможно, поэтому режим охлаждения постоянным тепловым потоком не рассматривается.

### § 5.5.2.3. Температурное поле при граничных условиях III рода

Температурное поле при нагреве бесконечной пластины в среде с постоянной температурой  $T_f$  и с постоянным коэффициентом теплоотдачи  $\alpha$  (ГУ III рода) показано на рис. 5.8. Температурный график построен с условиями однозначности, указанными под рисунком.

*Замечание.* Режимы нагрева бесконечного цилиндра и шара при граничных условиях III рода по форме аналогичны режиму нагрева бесконечной пластины и отличаются при одинаковых условиях однозначности только количественно в зависимости от коэффициента формы тела простой формы.

На рис. 5.8,а показан график изменения температуры по сечению тела для пяти моментов времени:

- начального момента  $\tau = 0$  с;
- трех моментов времени  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_3$ ;
- момента времени  $\tau_*$ , при котором наступает режим

*теплового равновесия* (см. рис. 5.8,б).

Для построения изменения температуры по сечению тела простой формы рассчитывают местоположение *направляющей* точки А, отстоящей от поверхности тела на расстояние  $x_0 = \lambda / \alpha$ . Штриховые линии, построенные из направляющей точки, являются касательными к температурным кривым на поверхности тела. При этом температура

флюида изменяется от температуры окружающей среды до температуры на поверхности тела в области  $\delta_{\text{тпс}}$  – в области теплового пограничного слоя.

При граничных условиях III рода процесс нагрева или охлаждения тела проходит три стадии (рис. 5.8,б):

– *начальный* период (первый временной участок), который длится до момента  $Fo < 1/(3k)$ , где  $k$  – коэффициент формы тела;

– *установившийся* или *регулярный* режим, который наступает, начиная с момента времени  $Fo \geq 1/(3k)$  (второй временной участок);

– режим *теплового равновесия*, при котором температура во всех точках сечения тела ( $0 \leq x_1 \leq R$  или  $0 \leq X \leq 1$ ) становится равной температуре окружающей среды  $T_f$  (третий временной участок), наступает в момент времени  $\tau_*$  и температурное поле по всему объему пластины *равно*  $T(x, \tau) = T_f = \text{const}$ , где  $0 \leq x \leq R$  и  $\tau \geq \tau_*$ .

Например, начало режима теплового равновесия для исходных данных, указанных на рис. 5.8, наступает в момент времени  $\tau_* = 90$  секунд.

В *начальный* период нагрева (охлаждения) тела ( $Fo < 1/(3k)$ ) на процесс формирования температурного поля в сильной степени оказывает влияние начальное распределение температур по сечению тела.

На *втором* временном участке развитие температурного поля не зависит от начального температурного поля и наступает *установившийся* режим теплопроводности. Этот период установившегося развития температурного поля при граничных условиях III рода называют *регулярным* режимом нагрева.

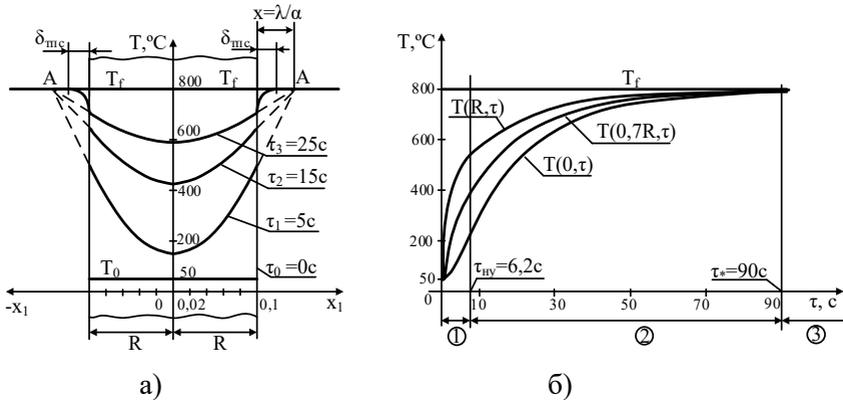


Рис. 5.8. Температурное поле бесконечной пластины при ГУ III рода ( $\lambda = 40 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ ;  $a = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $\alpha = 300 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$ ):  
 а – изменение температуры по сечению тела;  
 б – изменение температуры во времени в точках с координатами:  $x = R$  (поверхность тела),  $x = 0,7R$ ,  $x = 0$  (тепловой центр тела)

*Регулярный* режим нагрева (охлаждения) тела характеризуется постоянной относительной скоростью нагрева (охлаждения) тела, которую называют *темпом* нагрева (охлаждения). Темп нагрева не зависит от координат и от времени и по определению равен:

$$m = -\frac{1}{\Theta'''} \frac{\partial \Theta'''}{\partial \tau} = \text{пост.}, \quad (5.84)$$

где  $\Theta''' = \frac{T_f - T}{T_f - T_0}$  – безразмерная (относительная избыточная) температура при ГУ III рода;  $T_f$  – температура окружающей среды;  $T_0$  – начальная температура тела.

Вывод формулы темпа нагрева (охлаждения) приведен ниже.

Во время *теплового равновесия* тела с окружающей средой теплообмен между твердым телом и окружающей средой (окружением) отсутствует.

### § 5.5.3. Аналитическое решение краевой задачи теории теплопроводности при граничных условиях третьего рода

#### § 5.5.3.1. Общее аналитическое решение для тел простой формы

Теплообмен на границе твердого тела, который удобно описать граничными условиями третьего рода, наиболее часто встречается в практике инженерных расчетов. Для получения аналитического решения сформулируем краевую задачу теории теплопроводности в безразмерном виде:

– дифференциальное уравнение теплопроводности (5.69)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{k-1}{X} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial X};$$

– начальное условие (5.70)

$$\Theta_0 = \frac{T_f - T_0}{T_f - T_0} = 1;$$

– граничные условия:

а) на внутренней границе (5.71)

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=0} = 0;$$

б) на внешней границе (5.74)

$$-\left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=R} = \text{Bi} \cdot \Theta_w,$$

где  $\Theta''' \equiv \Theta = \frac{T_f - T}{T_f - T_0}$  – безразмерная температура при гра-

ничных условиях III рода;  $X = \frac{x_1}{R}$  – безразмерная коорди-

ната;  $R$  – характерный или определяющий размер тела (размер расчетной области);  $\text{Bi} = \alpha R / \lambda_w$  – критерий Био;

$\lambda_w$  – коэффициент теплопроводности твердого тела;

$\text{Fo} = \alpha t / R^2$  – безразмерное время – критерий Фурье;  $k$  – коэффициент формы тела.

*Замечание.* Для удобства записи формул при ГУ III рода обозначение безразмерной температуры  $\Theta'''$  заменим на  $\Theta$  (без верхнего индекса).

Аналитическое решение краевой задачи теории теплопроводности (5.69), (5.70), (5.71) и (5.74) впервые получено французским математиком Фурье методом разделения переменных, который Фурье специально разработал для решения дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. Аналитические решения краевой задачи теории теплопроводности (КЗТТ) для каждого тела простой формы в отдельности приведены во всех учебниках по теплообмену, например [4, 5, 13].

Профессор Ивановского энергетического института Леонид Александрович Бровкин предложил единую для всех трех тел простой формы запись аналитического решения краевой задачи теории теплопроводности при граничных условиях III рода [8]:

$$\Theta(X, \text{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Lambda_2(\mu_n X) \exp(-\mu_n^2 \cdot \text{Fo}), \quad (5.85)$$

где комплекс  $A_n$  и лямбда-функцию  $\Lambda_2$  рассчитывают по формулам:

$$A_n = \frac{2 \cdot Bi}{Bi^2 + (2 - k)Bi + \mu_n^2}; \quad (5.86)$$

$$\Lambda_2(\mu_n X) = \frac{X^{\frac{2-k}{2}} J_{\frac{k-2}{2}}(\mu_n X)}{J_{\frac{k-2}{2}}(\mu_n)}, \quad (5.87)$$

где  $\mu_n$  –  $n$ -й корень характеристического уравнения ( $n = 1, 2, \dots, \infty$ );  $J_m(\mu_n)$  – функции Бесселя первого рода  $m$ -го порядка – периодические затухающие функции, которые относят к классу специальных функций. Свойства функций Бесселя, их графическое представление, формулы для расчета и табулированные значения приведены во всех справочниках по высшей математике. Значения функций Бесселя первого рода нулевого  $J_0(u)$  и первого порядка  $J_1(u)$  приведены в литературе [21, 39]. Функции Бесселя первого рода дробных порядков выражаются через тригонометрические функции:

$$J_{-\frac{1}{2}}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot u}} \cdot \cos(u); \quad J_{\frac{1}{2}}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot u}} \cdot \sin(u);$$

$$J_{\frac{3}{2}}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot u}} \cdot \left( -\frac{\cos(u)}{u} - \sin(u) \right);$$

$$J_{\frac{5}{2}}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot u}} \cdot \left( \frac{\sin(u)}{u} - \cos(u) \right).$$

Характеристическое уравнение для решения дифференциального уравнения теплопроводности при граничных условиях III рода имеет вид:

$$Bi \cdot \frac{J_{k-2}(\mu_n)}{2} = \mu_n \cdot \frac{J_k(\mu_n)}{2}. \quad (5.88)$$

Методы решения характеристического уравнения (5.88) изложены в учебниках по теплообмену [4, 5]. Первые шесть корней уравнения (5.88) в зависимости от критерия Био  $\mu_1 \div \mu_6 = f(Bi)$ , приведены в [39].

### **§ 5.5.3.2. Алгоритм расчета температурного поля тел простой формы при граничных условиях III рода**

1. Аналитическое решение (5.85) – (5.88) применяют для случая, когда критерий Био лежит в интервале  $0,1 \leq Bi \leq 100$ . При  $Bi < 0,1$  расчет температурного поля выполняют по формулам для термически тонкого тела (см. раздел § 5.5.5), а при  $Bi > 100$  используют аналитическое решение при граничных условиях I рода. Поэтому на первом этапе расчета температурного поля по аналитическому решению (5.85) – (5.88) необходимо рассчитать критерий Био, который характеризует соотношение интенсивностей внутреннего и внешнего теплообмена.

2. Общее аналитическое решение для всех трех тел простой формы преобразуют для заданного по условию задачи тела путем подстановки в формулы (5.85) – (5.88) коэффициента формы тела  $k$ .

3. Рассчитывают критерий Фурье и определяют вид режима нагрева или охлаждения тела – начальный или регулярный. При условии  $Fo \geq \frac{1}{3k}$  выполняют расчет *регулярного*

режима теплопроводности, в противном случае при условии  $Fo < \frac{1}{3k}$ , необходимо найти температурное поле на начальной стадии нагрева или охлаждения.

4. Для условий задачи находят корни характеристического уравнения (5.88)  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ . Для *регулярного* режима достаточно рассчитать только первый корень  $\mu_1$ .

5. Зная корни  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ , рассчитывают комплекс  $A_1, A_2, A_3, \dots$  по формуле (5.86) и значения лямбда-функции по формуле (5.87)  $\Lambda_2(\mu_1 X), \Lambda_2(\mu_2 X), \Lambda_2(\mu_3 X), \dots$  в точке с заданной координатой  $X$ .

6. Находят безразмерную температуру  $\Theta(X, Fo)$  в заданной точке с координатой  $X$  в заданный момент времени  $Fo$  по формуле (5.85), рассчитывая сумму ряда с наперед заданной точностью.

7. Зная безразмерную температуру  $\Theta(X, Fo)$ , рассчитывают температуру в градусах Цельсия или Кельвинах (в зависимости от выбранной шкалы температур) в заданной точке в заданный момент времени по формуле:

$$T = T_f - \Theta \cdot (T_f - T_0), \quad (5.89)$$

которая следует из определения безразмерной температуры (5.42) при граничных условиях III рода.

### **§ 5.5.3.3. Расчет регулярного режима теплопроводности**

Для регулярного режима теплопроводности, который существует при  $Fo \geq \frac{1}{3k}$ , все слагаемые ряда (5.85) начиная со

второго, становятся много меньше первого слагаемого и поэтому для расчета безразмерной температуры  $\Theta(X, Fo)$  при ГУ III рода можно ограничиться только первым слагаемым суммы ряда (5.85):

$$\Theta(X, Fo) = A_1 \Lambda_2(\mu_1 X) \exp(-\mu_1^2 Fo), \quad (5.90)$$

где  $\mu_1$  – первый корень характеристического уравнения (5.88).

Логарифмируя левую и правую части аналитического решения (5.90), получим:

$$\ln[\Theta(X, Fo)] = C - \mu_1^2 Fo, \quad (5.91)$$

где  $C = \ln[A_1 \Lambda_2(\mu_1 X)] \neq f(Fo)$  – логарифм произведения первого и второго сомножителей аналитического решения (5.90), которые не зависят от времени.

Анализируя формулу (5.91), можно сделать вывод о том, что  $\ln[\Theta]$  линейно зависит от безразмерного времени  $Fo$ , поэтому зависимость (5.91) на графиках температурного поля в координатах  $\ln[\Theta] - Fo$  имеет вид прямых линий (см. рис. 5.9).

Подставляя значение критерия Фурье  $Fo = at / R^2$  в формулу (5.91), получим:

$$\ln[\Theta(X, Fo)] = C - \mu_1^2 \cdot \frac{at}{R^2}$$

или

$$\ln[\Theta(X, Fo)] = C - m \cdot \tau, \quad (5.92)$$

где  $m = \frac{\mu_1^2 a}{R^2}$ ;  $m$  – темп нагрева (охлаждения) тела простой формы при граничных условиях III рода,  $c^{-1}$ .

Дифференцируя левую и правую части уравнения (5.92) по времени  $\tau$ , получим формулу (5.84)

$$m = -\frac{1}{\Theta'''} \frac{\partial \Theta'''}{\partial \tau} = \text{пост},$$

раскрывающую физический смысл темпа нагрева (см. § 5.5.2.3):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\ln \Theta) = \frac{\partial}{\partial \tau} (C - m \cdot \tau) \Rightarrow \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} \frac{1}{\Theta} = -m \neq f(x_1, \tau), \quad (5.93)$$

где  $x_1$  – координата тела простой формы;  $\tau$  – время.

Из анализа формул (5.84) и (5.93) следует, что скорость изменения безразмерной температуры во времени  $\frac{\partial \Theta}{\partial \tau}$  (скорость нагрева или охлаждения), отнесенная к безразмерной температуре  $\Theta$ , равна темпу нагрева  $m$ .

*Замечание.* Знак минус в формуле (5.93) показывает, что согласно определению безразмерной температуры  $\Theta$  при ГУ III рода (5.42), безразмерная температура при нагреве уменьшается.

В формуле аналитического решения (5.90) комплекс  $A_1$  зависит от критерия Био  $A_1 = f(Bi)$ , так как  $\mu_1 = f(Bi)$ . Лямбда-функция  $\Lambda_2(\mu_1 X)$  зависит от критерия Био и координаты точки  $X$ , в которой рассчитывают температуру  $\Lambda_2(\mu_1 X) = f(Bi, X)$ . Третий множитель  $\exp(-\mu_1^2 Fo)$  в формуле (5.90) зависит от критерия Био и безразмерного времени, которое выражает критерий Фурье  $\exp(-\mu_1^2 Fo) = f(Bi, Fo)$ . Поэтому аналитическое решение для расчета регулярного режима теплопроводности в телах простой формы при выполнении инженерных расчетов на калькуляторе удобно переписать в виде:

$$\Theta(X, Fo) = N_k \cdot f_k(\mu_1 X) \cdot \varphi_k(\mu_1 Fo), \quad (5.94)$$

где  $N_k$  – коэффициент, учитывающий форму тела простой формы;  $f_k(\mu_1 X)$  – функция, отражающая изменение

температуры по сечению тела простой формы;  $\varphi_k(\mu_1 Fo) = \exp(-\mu_1^2 Fo)$  – функция отражающая изменение температуры во времени тела простой формы.

### *Температурное поле бесконечной пластины*

Для бесконечной пластины коэффициент  $N_k$  обозначают:  $N_{k=1} \equiv N_{\Pi}$ , а функция  $f_{k=1}(\mu_1 X)$  равна:  $f_{k=1}(\mu_1 X) = \cos(\mu_1 X)$ , поэтому, подставляя их значения в формулу (5.94), получают:

$$\Theta(X, Fo) = N_{\Pi} \cdot \cos(\mu_1 X) \exp(-\mu_1^2 Fo), \quad (5.95)$$

где  $N_{\Pi} = A_1^{k=1} \cdot \frac{1}{\cos(\mu_1)} = \frac{2Bi}{Bi^2 + Bi + \mu_1^2} \cdot \frac{1}{\cos(\mu_1)}$ ;  $A_1^{k=1}$  – комплекс

плекс  $A_1$  в уравнении (5.90) для бесконечной пластины, рассчитанный по формуле (5.86) при  $k=1$ ; функция  $f_{k=1}(\mu_1 X) = \cos(\mu_1 X)$  рассчитана по формуле (5.87), и ее вывод приведен в [39].

Температуру в тепловом центре ( $X = 0$ ) и на поверхности бесконечной пластины ( $X = 1$ ) для регулярного режима при  $Fo = 1 / (3 \cdot k) = 1 / (3 \cdot 1) \geq 0,33$  рассчитывают по формулам:

$$\Theta_c = \Theta(0, Fo) = N_{\Pi} \cdot \exp(-\mu_1^2 \cdot Fo); \quad (5.96)$$

$$\Theta_w = \Theta(1, Fo) = P_{\Pi} \cdot \exp(-(\mu_1^2 \cdot Fo)), \quad (5.97)$$

где  $P_{\Pi} = A_1^{k=1} = N_{\Pi} \cdot \cos(\mu_1) = \frac{2Bi}{Bi^2 + Bi + \mu_1^2}$ .

Для удобства инженерных расчетов значения параметров  $N_{\Pi}$ ,  $P_{\Pi}$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_1^2 = f(Bi)$  приведены в справочной литературе [16, 21, 39] и в приложении к учебнику.

### *Температурное поле бесконечного цилиндра*

Для бесконечного цилиндра коэффициент  $N_k$  обозначают:  $N_{k=2} \equiv N_{\text{ц}}$ , а функция  $f_{k=2}(\mu_1 X)$  равна:  $f_{k=2}(\mu_1 X) = J_0(\mu_1 X)$ , поэтому подставляя их значения в формулу (5.94), получают:

$$\Theta(X, Fo) = N_{\text{ц}} \cdot J_0(\mu_1 X) \exp(-\mu_1^2 Fo), \quad (5.98)$$

где  $N_{\text{ц}} = A_1^{k=2} \cdot \frac{1}{J_0(\mu_1)} = \frac{2Bi}{Bi^2 + \mu_1^2} \cdot \frac{1}{J_0(\mu_1)}$ ;  $A_1^{k=2}$  – комплекс

$A_1$  в уравнении (5.90) для бесконечного цилиндра, рассчитанный по формуле (5.86) при  $k = 2$ ; функция  $f_{k=2}(\mu_1 X) = J_0(\mu_1 X)$  рассчитана по формуле (5.87), и ее вывод приведен в [39].

Температуру в тепловом центре ( $X = 0$ ) и на поверхности ( $X = 1$ ) бесконечного цилиндра для регулярного режима при  $Fo = 1 / (3 \cdot k) = 1 / (3 \cdot 2) \geq 0,17$  рассчитывают по формулам:

$$\Theta_{\text{с}} = \Theta(0, Fo) = N_{\text{ц}} \cdot \exp(-\mu_1^2 \cdot Fo); \quad (5.99)$$

$$\Theta_{\text{w}} = \Theta(1, Fo) = P_{\text{ц}} \cdot \exp(-(\mu_1^2 \cdot Fo)), \quad (5.100)$$

где  $P_{\text{ц}} = A_1^{k=2} = N_{\text{ц}} \cdot J_0(\mu_1) = \frac{2Bi}{Bi^2 + \mu_1^2}$ .

Для удобства инженерных расчетов значения параметров  $N_{\text{ц}}$ ,  $P_{\text{ц}}$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_1^2 = f(Bi)$  приведены в справочной литературе [16, 21, 39] и в приложении к учебнику.

### Температурное поле шара

Для шара коэффициент  $N_k$  обозначают:  $N_{k=3} \equiv N_{\text{ш}}$ , а функция  $f_{k=3}(\mu_1 X)$  равна:  $f_{k=3}(\mu_1 X) = \sin(\mu_1 X) / \mu_1 X$  при  $X > 0$ , поэтому, подставляя их значения в формулу (5.94), получаем:

$$\Theta(X, Fo) = N_{\text{ш}} \frac{\sin(\mu_1 X)}{\mu_1 X} \exp(-\mu_1^2 Fo), \quad (5.101)$$

где  $N_{\text{ш}} = A_1^{k=3} \cdot \frac{\mu_1}{\sin(\mu_1)} = \frac{2Bi}{Bi^2 - Bi + \mu_1^2} \cdot \frac{\mu_1}{\sin(\mu_1)}$ ;  $A_1^{k=3}$  – комплекс  $A_1$  в уравнении (5.90) для шара, рассчитанный по формуле (5.86) при  $k = 3$ ; функция  $f_{k=3}(\mu_1 X) = \frac{\sin(\mu_1 X)}{\mu_1 X}$  рассчитана по формуле (5.87) и ее вывод приведен в [39].

Температуру в тепловом центре ( $X = 0$ ) и на поверхности ( $X = 1$ ) шара для регулярного режима при  $Fo = 1 / (3 \cdot k) = 1 / (3 \cdot 3) \geq 0,12$  рассчитывают по формулам:

$$\Theta_c = \Theta(0, Fo) = N_{\text{ш}} \cdot \exp(-\mu_1^2 \cdot Fo); \quad (5.102)$$

$$\Theta_w = \Theta(1, Fo) = P_{\text{ш}} \cdot \exp(-(\mu_1^2 \cdot Fo)), \quad (5.103)$$

где  $P_{\text{ш}} = A_1^{k=3} = N_{\text{ш}} \cdot \frac{\sin(\mu_1)}{\mu_1} = \frac{2Bi}{Bi^2 - Bi + \mu_1^2}$ .

Для удобства инженерных расчетов значения параметров  $N_{\text{ш}}$ ,  $P_{\text{ш}}$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_1^2 = f(Bi)$  приведены в справочной литературе [16, 21, 39] и в приложении к учебнику.

#### § 5.5.3.4. Расчет регулярного режима теплопроводности в телах простой формы по номограммам

В результате решения краевой задачи нестационарной теплопроводности (5.69) – (5.71), (5.74), записанной в безразмерном виде, получено аналитическое решение (5.85) – (5.87), которое для регулярного режима принимает вид (5.90). Из анализа уравнения (5.90) можно сделать вывод о том, что безразмерная температура  $\Theta = f(k, X, Fo, Bi)$  зависит от четырех параметров: коэффициента формы тела ( $k$ ), безразмерной координаты ( $X$ ), безразмерного времени, которое характеризует критерий Фурье ( $Fo$ ) и безразмерного коэффициента теплоотдачи – критерия Био ( $Bi$ ), который характеризует соотношение интенсивностей внутреннего и внешнего теплообмена. Для удобства инженерных расчетов функцию  $\Theta = f(k, X, Fo, Bi)$  представляют в виде графиков – номограмм. Наиболее часто в расчетах используют шесть графиков зависимости  $\Theta = f(Fo, Bi)$ , которые построены для теплового центра ( $X = 0$ ) и для поверхности ( $X = 1$ ) трех тел простой формы и приведены в справочной литературе [16, 21, 39].

На рис. 5.9 показан общий вид номограммы для расчета нестационарной теплопроводности в телах простой формы при граничных условиях III рода.

Анализ формулы (5.91) показывает, что в полулогарифмической системе координат  $\ln(\Theta) - Fo$  зависимость  $\Theta = f(Fo)$  является линейной вида  $\ln(\Theta) = C - D \cdot Fo$ , где  $C$  и  $D$  – коэффициенты, не зависящие от критерия Фурье ( $Fo$ ).

При расчетах теплообмена, включая и расчет нестационарной теплопроводности, существуют две основные постановки задачи – прямая и обратная (см. § 3.1. Классификация задач тепломассообмена).

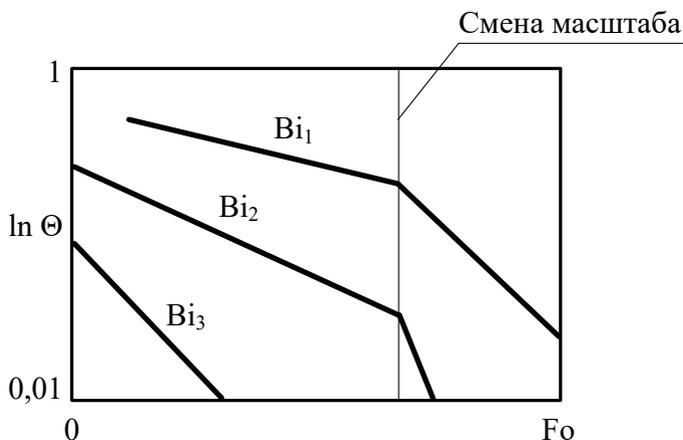


Рис. 5.9. Номограмма для расчета нестационарной теплопроводности при граничных условиях III рода:  
 $Bi_3 > Bi_2 > Bi_1$

Целью решения *прямой* задачи нестационарной теплопроводности является определение температуры в тепловом центре ( $T_c$ ) и на поверхности пластины ( $T_w$ ) при заданных условиях однозначности.

В результате решения *обратной* задачи нестационарной теплопроводности по известной температуре в тепловом центре ( $T_c$ ) или на поверхности пластины ( $T_w$ ) и частично заданных условиях однозначности находят неизвестное условие однозначности – время процесса теплопроводности или коэффициент теплоотдачи в зависимости от условий задачи.

### ***Прямая постановка задачи расчета нестационарной теплопроводности***

При прямой постановке задачи расчета нестационарной теплопроводности известны все условия

однозначности (см. § 5.4), необходимые для расчета температурного поля:

– размеры расчетной области: геометрические размеры (толщина пластины, диаметр цилиндра или шара) и форма тела (пластина, цилиндр или шар), а также время нагрева или охлаждения ( $\tau_k$ );

– физические свойства вещества: коэффициент теплопроводности ( $\lambda$ ) и коэффициент температуропроводности ( $a$ );

– краевые условия: начальное условие в форме (5.50) и граничные условия третьего рода в форме закона теплоотдачи Ньютона (5.61) на внешней границе тела. На внутренней границе расчетной области задано условие адиабаты (5.59).

Требуется найти температуру теплового центра тела ( $T_c$ ), температуру поверхности тела ( $T_w$ ) и среднюю по массе температуру тела ( $T_m$ ).

В краткой форме записи прямую постановку задачи расчета нестационарной теплопроводности в телах простой формы записывают следующим образом.

Дано:  $\delta$  или  $d$ ;

$\tau_k$ ;

$\lambda, a$ ;

$T_0$ ;

$T_f, \alpha$ .

Найти: температуру в тепловом центре тела  $T_c = T(0, \tau_k)$ ;

температуру на поверхности тела  $T_w = T(R, \tau_k)$ ;

среднюю по массе температуру тела  $T_m = \bar{T}(\tau_k)$ .

Алгоритм решения прямой задачи состоит из следующих этапов.

**1.** Перед началом расчета необходимо определить размер расчетной области  $R$ , который для бесконечного

цилиндра и шара при неизменных по поверхности условиях теплообмена равен радиусу тела ( $R = d_{ц} / 2 = r_{ц}$  или  $R = d_{ш} / 2 = r_{ш}$ ). Для бесконечной пластины при ее *симметричном* нагреве или охлаждении  $R = \delta / 2$ , а при *несимметричном* внешнем теплообмене (теплообмен на одной из сторон пластины отсутствует)  $R = \delta$ .

2. Далее рассчитывают критерии Био ( $Bi$ ) и Фурье ( $Fo$ ) и по графикам-номограммам [16, 21, 39] для теплового центра и для поверхности тела определяют безразмерные температуры теплового центра  $\Theta_c$  и поверхности  $\Theta_w$  (см. рис. 5.10, линия 1):

$$\left. \begin{aligned} Bi &= \frac{\alpha R}{\lambda} \\ Fo_K &= \frac{a \tau_K}{R^2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{По номограммам} \\ \rightarrow \Theta_w \text{ и } \Theta_c. \end{array}$$

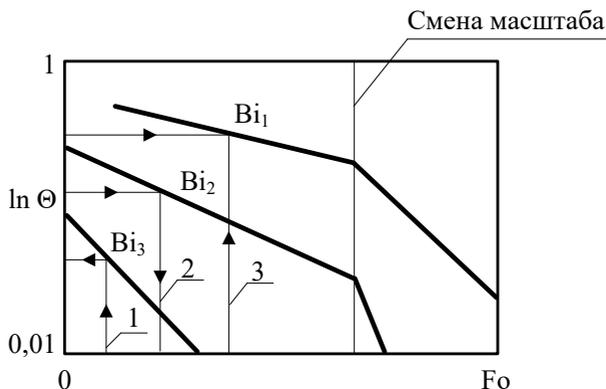


Рис. 5.10. Номограмма для расчета нестационарной теплопроводности при граничных условиях III рода:  
 1 – прямая постановка задачи  $\Theta = f_1(Fo, Bi)$ ;  
 2 – обратная постановка задачи  $Fo = f_2(\Theta, Bi)$ ;  
 3 – обратная постановка задачи  $Bi = f_3(\Theta, Fo)$

3. Затем находят температуры на поверхности и в центре тела по формуле (5.89):

$$T = T_f - \Theta \cdot (T_f - T_0),$$

где  $T = T_w$ , если  $\Theta = \Theta_w$ , и  $T = T_c$ , если  $\Theta = \Theta_c$ .

4. На заключительном этапе расчета находят среднюю по массе температуру тела в конце нагрева или охлаждения тела. При допущении параболического распределения температуры по сечению тел простой формы расчет среднemasсовой температуры выполняют по формуле:

$$T_m = T_c + \frac{k}{2+k} \Delta T, \quad (5.104)$$

где  $k$  – коэффициент формы тела;  $\Delta T = T_w - T_c$  – перепад температур по сечению тела.

Заметим, что при охлаждении перепад температур по сечению тела отрицательный  $\Delta T < 0$ , так как в этом случае температура поверхности тела меньше температуры теплового центра  $T_w < T_c$ .

### ***Обратная постановка задачи расчета нестационарной теплопроводности***

Целью решения обратной задачи теории теплопроводности является определение одного из параметров в условиях однозначности – времени процесса ( $\tau_k$ ) или коэффициента теплоотдачи ( $\alpha$ ). Но при этом должна быть задана температура теплового центра ( $T_c$ ) или температура поверхности тела ( $T_w$ ). Остальные условия однозначности, кроме  $\tau_k$  или  $\alpha$ , по условию задачи тоже должны быть заданы.

#### *А. Определение времени нагрева или охлаждения тела*

В краткой форме записи обратную постановку задачи по расчету времени процесса теплопроводности записывают в следующем виде.

Дано:  $\delta$  или  $d$ ;

$T_w$  либо  $T_c$ ;

$\lambda, a$ ;

$T_0$ ;

$T_f, \alpha$ .

Найти: время процесса теплопроводности  $\tau_k$ ;

температуру в тепловом центре тела  $T_c$ , если задана температура на поверхности  $T_w$ , либо температуру поверхности тела  $T_w$ , если задана температура в тепловом центре  $T_c$ ;

среднюю по массе температуру тела  $T_m = \bar{T}(\tau_k)$ .

Алгоритм решения поставленной выше задачи состоит из следующих этапов.

1. Перед началом расчета необходимо определить размер расчетной области  $R$ , который для бесконечного цилиндра и шара при неизменных по поверхности условиях теплообмена равен радиусу тела ( $R = d_{ц} / 2 = r_{ц}$  или  $R = d_{ш} / 2 = r_{ш}$ ). Для бесконечной пластины при ее *симметричном* нагреве или охлаждении  $R = \delta / 2$ , а при *несимметричном* внешнем теплообмене (теплообмен на одной из сторон пластины отсутствует)  $R = \delta$ .

2. Далее рассчитывают критерий Био ( $Bi$ ) и температурный критерий  $\Theta_c$  или  $\Theta_w$  в зависимости от того, какая температура задана по условию задачи  $T_c$  или  $T_w$ . Затем по

номограмме  $\Theta_c = f(\text{Fo}, \text{Bi})$  или по номограмме  $\Theta_w = f(\text{Fo}, \text{Bi})$  находят критерий Фурье (см. рис. 5.10, линия 2):

$$\left. \begin{aligned} \text{Bi} &= \frac{\alpha R}{\lambda} \\ \Theta &= \frac{T_f - T}{T_f - T_0} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{По номограммам}} \text{Fo}_k.$$

3. Зная критерий Фурье  $\text{Fo}_k = a\tau_k / R^2$ , рассчитывают время процесса теплопроводности по формуле:

$$\tau_k = \text{Fo}_k \frac{R^2}{a}. \quad (5.105)$$

4. Не заданную по условию задачи температуру  $T_c$  (либо температуру  $T_w$ ) и среднemasсовую температуру тела  $T_m$  находят по алгоритму решения прямой задачи.

### ***Б. Определение коэффициента теплоотдачи***

В краткой форме записи обратную постановку задачи по расчету коэффициента теплоотдачи записывают в следующем виде.

Дано:  $\delta$  или  $d$ ;

$\tau_k$ ;

$\lambda, a$ ;

$T_0$ ;

$T_f$ ;

$T_w$  либо  $T_c$ .

Найти: коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ ;

температуру в тепловом центре тела  $T_c$ , если задана температура на поверхности  $T_w$ , либо температуру поверхности тела  $T_w$ , если задана температура в тепловом центре  $T_c$ ;

среднюю по массе температуру тела  $T_m = \bar{T}(\tau_k)$ .

Алгоритм решения поставленной выше задачи состоит из следующих этапов.

1. Перед началом расчета необходимо определить размер расчетной области  $R$ , который для бесконечного цилиндра и шара при неизменных по поверхности условиях теплообмена равен радиусу тела ( $R = d_{ц} / 2 = r_{ц}$  или  $R = d_{ш} / 2 = r_{ш}$ ). Для бесконечной пластины при ее *симметричном* нагреве или охлаждении  $R = \delta / 2$ , а при *несимметричном* внешнем теплообмене (теплообмен на одной из сторон пластины отсутствует)  $R = \delta$ .

2. Далее рассчитывают критерий Фурье ( $Fo$ ) и температурный критерий  $\Theta_c$  или  $\Theta_w$  в зависимости от того, какая температура задана по условию задачи  $T_c$  или  $T_w$ . Затем по номограмме  $\Theta_c = f(Fo, Bi)$  или по номограмме  $\Theta_w = f(Fo, Bi)$  находят критерий Био (рис. 5.10, линия 3):

$$\left. \begin{aligned} Fo_k &= \frac{a \tau_k}{R^2} \\ \Theta &= \frac{T_f - T}{T_f - T_0} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{По номограммам}} Bi.$$

3. По значению критерия Био  $Bi = \alpha R / \lambda$ , рассчитывают коэффициент теплоотдачи по формуле:

$$\alpha = \text{Bi} \cdot \frac{\lambda}{R}. \quad (5.106)$$

4. Не заданную по условию задачи температуру  $T_c$  (либо температуру  $T_w$ ) и среднемассовую температуру тела  $T_m$  находят по алгоритму решения прямой задачи.

**Замечание 1.** Информация о температурном поле в виде значения трех параметров ( $T_w$ ,  $T_c$  и  $\Delta T = T_w - T_c$ ) необходима:

- для контроля допустимой по технологии температуры тела (определяют по температуре в тепловом центре  $T_c$  или по температуре на поверхности тела  $T_w$ );

- для расчета термических напряжений, которые зависят от перепада температур  $\Delta T = T_w - T_c$ ;

- для расчета теплового баланса по среднемассовой температуре тела в начале и конце нагрева или охлаждения.

**Замечание 2.** Температурное поле тел простой формы в *начальный* период нагрева или охлаждения ( $\text{Fo} < 1/3k$ ) при граничных условиях III рода можно рассчитать по номограммам, приведенным в литературе [21, 39] или по формулам (5.85) – (5.88), изложенным в § 5.5.3.1 учебника.

### § 5.5.3.5. Экспериментальное исследование регулярного режима теплопроводности

Свойство регулярного режима, заключающееся в постоянстве темпа нагрева (охлаждения), используют для экспериментального определения условий однозначности, необходимых для расчета нестационарной теплопроводности. Темп нагрева (охлаждения) находят по графику температурного поля, построенному по результатам эксперимента. При этом график строят в полулогарифмической системе координат  $\ln \theta - \tau$ , где  $\theta$  – избыточная температура,  $\tau$  – время (см. рис. 5.11).

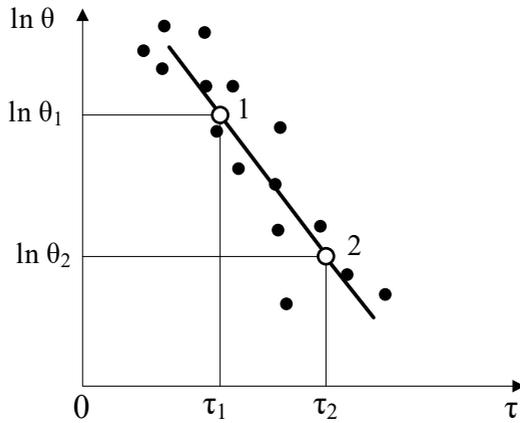


Рис. 5.11. Регулярный режим охлаждения:  
 ••••• — эксперимент;  
 ————— — аппроксимирующая прямая

При графической обработке результатов эксперимента вместо безразмерной (избыточной относительной) температуры  $\Theta = (T_f - T) / (T_f - T_0)$ , используют избыточную температуру  $\theta = T_f - T$  при нагреве или избыточную температуру  $\theta = T - T_f$  при охлаждении тела простой формы. Безразмерная температура  $\Theta$  отличается от избыточной температуры  $\theta$  только постоянным множителем  $1 / (T_f - T_0)$ .

Рассмотрим определение темпа  $m$  при охлаждении образца в виде тела простой формы любой геометрической конфигурации. Экспериментальные значения температуры наносят в поле графика и аппроксимируют опытные точки прямой линией, соответствующей регулярному режиму теплопроводности. Далее выбирают на прямой линии две точки 1 и 2 и находят темп охлаждения по формуле:

$$-m = \frac{\ln \theta_1 - \ln \theta_2}{\tau_1 - \tau_2} \Rightarrow m = \frac{\ln \theta_1 - \ln \theta_2}{\tau_2 - \tau_1}, \quad (5.107)$$

где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  избыточные температуры в моменты времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$ .

**Замечание.** Обратим внимание, что в эксперименте при регулярном режиме теплопроводности в телах простой формы температуру можно измерять в *любой* точке тела (не только в тепловом центре или на поверхности тела)!

Зная темп нагрева  $m = \frac{\mu_1^2 a}{R^2}$ , можно найти два параметра, входящих в условия однозначности – коэффициент температуропроводности  $a = m \frac{R^2}{\mu_1^2}$  и коэффициент тепло-

отдачи  $\alpha$  по значению критерия Био  $\alpha = \text{Bi} \frac{\lambda}{R}$ . Потому что критерий Био и первый корень характеристического уравнения  $\mu_1$  однозначно связаны функциональной зависимостью  $\mu_1 = f(\text{Bi})$ , которая для тел простой формы приведена в табличном виде в справочной литературе [16, 21, 39]. При использовании таблиц необходимо применять процедуру интерполирования, что приводит к возрастанию погрешности расчета. Для уменьшения погрешности определения коэффициента температуропроводности (**a**) и коэффициента теплоотдачи ( $\alpha$ ) рассматривают два крайних случая нагрева (охлаждения) тела, для которых первый корень  $\mu_1$  известен точно:

– для определения коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  в опыте используют нагрев (охлаждение) *термически тонких* тел, который существует при  $\text{Bi} < 0,1$ ;

– для определения коэффициента температуропроводности  $\mathbf{a}$  эксперимент проводят, нагревая (охлаждая) *термически толстые* тела при  $Bi > 100$ .

### *Экспериментальное определение коэффициента теплоотдачи*

При  $Bi < 0,1$  известно точное аналитическое решение характеристического уравнения (5.88) для первого корня [8], равное  $\mu_1 = \sqrt{k \cdot Bi}$ , подставляя которое в формулу (5.92) для темпа нагрева  $\mathbf{m}$  получим:

$$m = \frac{\mu_1^2 a}{R^2} = \frac{k \cdot Bi \cdot a}{R^2} \Rightarrow Bi = m \cdot \frac{R^2}{k \cdot a} \Rightarrow \frac{\alpha R}{\lambda} = m \cdot \frac{R^2}{k \cdot a}.$$

И окончательно коэффициент теплоотдачи равен:

$$\alpha = m \cdot \frac{R}{k} \cdot \frac{\lambda}{a} = m \cdot \frac{R \cdot c'_p}{k} = m \cdot R_v c'_p, \quad (5.108)$$

где  $m$  – темп нагрева (охлаждения),  $c^{-1}$ ;  $R$  – размер расчетной области,  $m$ ;  $R_v = R / k$  – обобщенный размер тела простой формы,  $m$ ;  $k$  – коэффициент формы тела простой формы;  $a = \lambda / c'_p$  – коэффициент температуропроводности,  $m^2/c$ ;  $c'_p = \lambda / a$  – удельная объемная теплоемкость, Дж/( $m^3 \cdot K$ ).

**Замечание.** При нагреве (охлаждении) тела в лучепрозрачной среде коэффициент теплоотдачи, найденный по формуле (5.108) для регулярного режима, равен сумме конвективной  $\alpha_K$  и лучистой  $\alpha_L$  составляющих теплоотдачи  $\alpha = \alpha_K + \alpha_L$ , где  $\alpha_L$  рассчитывают по формуле (1.36) (см. § 1.6).

## *Экспериментальное определение коэффициента температуропроводности*

При значении критерия Био  $Bi > 100$  первый корень характеристического уравнения (5.88) равен:

- $\mu_1 = \pi/2$  для бесконечной пластины ( $k = 1$ );
- $\mu_1 = 2,40482$  для бесконечного цилиндра ( $k = 2$ );
- $\mu_1 = \pi$  для шара ( $k = 3$ ).

Определив экспериментально темп нагрева  $m$  по формуле (5.107) и зная корень характеристического уравнения  $\mu_1$  для тела заданной формы, находят коэффициент температуропроводности из формулы (5.92):

$$a = m \cdot \frac{R^2}{\mu_1^2}. \quad (5.109)$$

Метод регулярного режима для определения коэффициента температуропроводности имеет ограничения, связанные с условием обеспечения большого значения критерия

Био  $\left( Bi = \frac{\alpha R}{\lambda} > 100 \right)$ . Для выполнения этого условия необ-

ходимо экспериментальный образец изготавливать из материала с коэффициентом теплопроводности меньше, чем  $\lambda < \alpha R / 100$ . Например, для образца с размером  $R = 0,05$  м нагреваемого в среде с коэффициентом теплоотдачи  $\alpha = 300$  Вт/(м<sup>2</sup>К) метод экспериментального определения коэффициента температуропроводности можно применить, если выполняется условие  $\lambda < \frac{300 \cdot 0,05}{100} = 0,15$  Вт/(мК), то есть для

тел с малым коэффициентом теплопроводности (огнеупоры и тепловая изоляция).

#### § 5.5.4. Расчет температурного поля в телах сложной формы

Телами сложной формы называют тела, которые могут быть получены в результате пересечения тел простой геометрической формы. На рис. 5.12 показаны три тела сложной формы:

– короткий цилиндр (рис. 5.12,а) – цилиндр, у которого высота и диаметр незначительно отличаются друг от друга. Короткий цилиндр получают в результате пересечения бесконечного цилиндра I и бесконечной пластины II;

– бесконечный брус (рис. 5.12,б) – брус, у которого длина  $l$  много больше двух других размеров  $l \gg a, b$ . Бесконечный брус получают в результате пересечения двух бесконечных пластин I и II;

– параллелепипед (рис. 5.12,в). Параллелепипед получают в результате пересечения трех бесконечных пластин I, II и III.

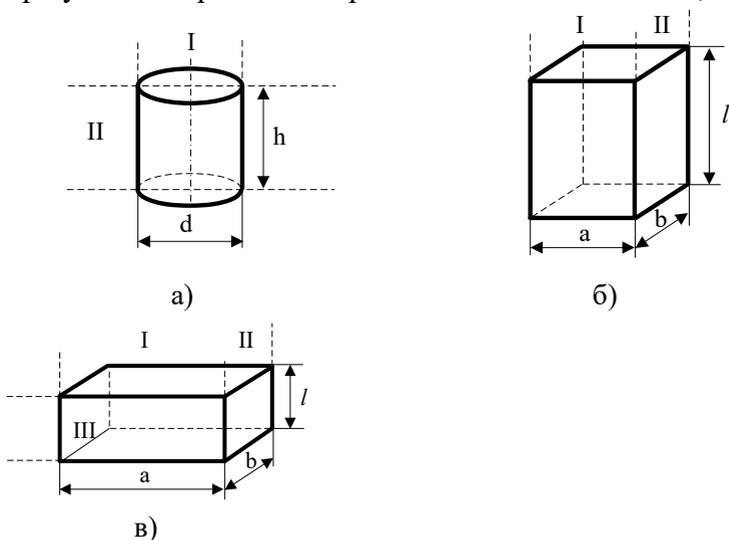


Рис. 5.12. Тела сложной формы:

а – короткий цилиндр; б – бесконечный брус; в – параллелепипед

Температурные поля тел сложной формы при граничных условиях III рода находят суперпозицией (наложением) температурных полей тел простой формы, полученных численно или аналитически.

При граничных условиях III рода безразмерная температура в заданной точке тела сложной формы равна произведению безразмерных температур (температурных критериев) в этой точке в телах простой формы, в результате пересечения которых было получено данное тело:

– для короткого цилиндра и бесконечного бруса

$$\Theta = \Theta_I \cdot \Theta_{II}; \quad (5.109)$$

– для параллелепипеда

$$\Theta = \Theta_I \cdot \Theta_{II} \cdot \Theta_{III}. \quad (5.110)$$

Безразмерные температуры тел простой формы, входящие в формулы (5.109) и (5.110), можно рассчитать аналитически по формулам и по номограммам (см. § 5.3.3) или численными методами (см. § 5.5.6).

### § 5.5.5. Температурное поле тел простой формы в зависимости от критерия Био́

Критерий Био́  $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda_w} = \frac{\alpha}{(\lambda_w/R)}$  характеризует отно-

шение интенсивности *внешнего* теплообмена, которая зависит от коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ , к интенсивности *внутреннего* теплообмена, которая зависит от тепловой проводимости – отношения  $(\lambda_w/R)$  (см. § 5.4.2.3). При этом тепловая проводимость тела  $(\lambda_w/R)$  увеличивается с ростом коэффициента теплопроводности твердого тела  $\lambda_w$  и уменьшением размера тела  $R$ .

В зависимости от критерия Био́ температурное поле в твердом теле имеет характерные черты развития во времени

и по объему тела. При этом все тела условно разделяют на три группы, для каждой из которых существуют особенности математического описания процесса теплопроводности:

- при  $Bi < 0,1$  температурное поле *не изменяется* по объему (по сечению для тел простой формы) и такие тела называют *термически тонкими* телами, для расчета которых используют частное решение КЗТТ при ГУ III рода;

- при  $Bi > 100$  температура поверхности тела равна температуре окружающей среды и процесс теплопроводности моделируется решением КЗТТ при ГУ I рода;

- при  $0,1 \leq Bi \leq 100$  температурное поле рассчитывают, используя аналитическое решение при ГУ III рода.

**Замечание.** Тела при  $Bi \geq 0,1$  также называют термически толстыми или *термически массивными* телами.

### ***Температурное поле при $0,1 \leq Bi \leq 100$***

Развитие безразмерного температурного поля  $\Theta = f(X, Fo)$  по сечению тела простой формы и во времени при условии  $0,1 \leq Bi \leq 100$  показано на рис. 5.13,а. Температура тела изменяется от  $T = T_0$  в начальный момент времени  $\tau = 0$  до температуры  $T = T_f$  при наступлении режима теплового равновесия при  $\tau \geq \tau_*$ . Безразмерная температура

в этом случае изменяется от единицы  $\Theta = \frac{T_f - T_0}{T_f - T_0} = 1$  в

начальный момент времени ( $Fo = 0$ ) до нуля

$\Theta = \frac{T_f - T_f}{T_f - T_0} = 0$  в момент времени  $Fo = Fo_*$ .

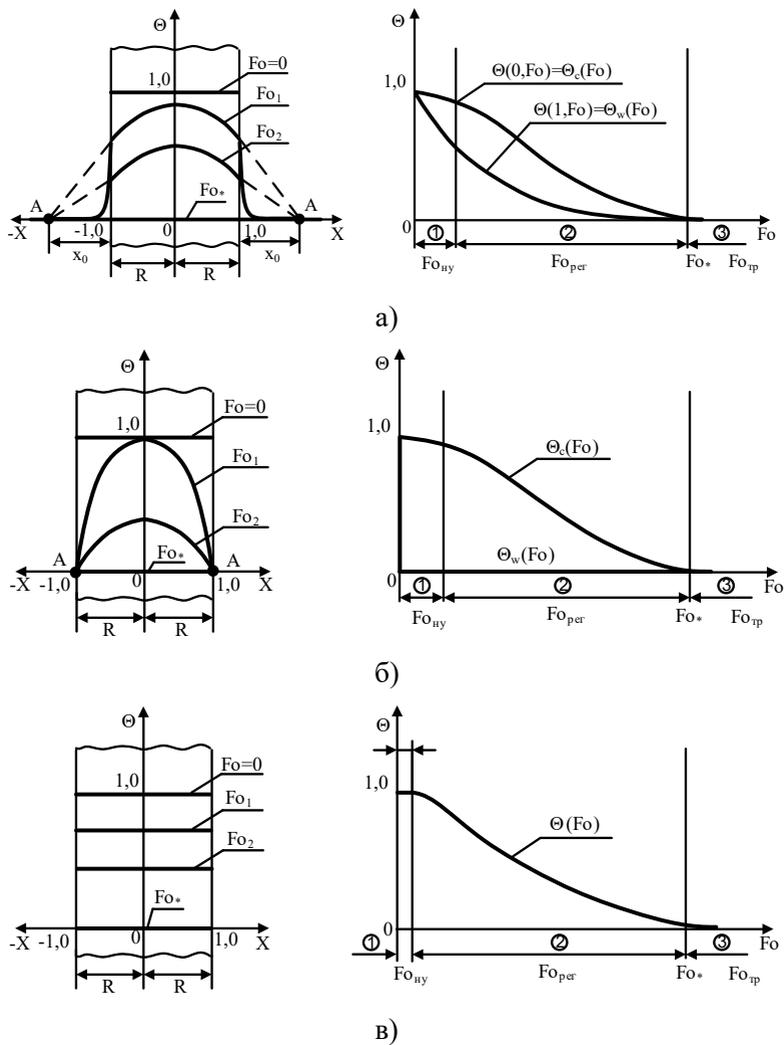


Рис. 5.13. Безразмерное температурное поле тела простой формы:

а –  $0,1 \leq Bi \leq 100$ ; б –  $Bi > 100$  ( $Bi \rightarrow \infty$ ); в –  $Bi < 0$  ( $Bi \rightarrow 0$ )

Обозначения:  $Fo_{ny}$  – период действия НУ;  $Fo_{per}$  – время регулярного режима;  $Fo_{tr}$  – время теплового равновесия

При значении критерия Био  $0,1 \leq Bi \leq 100$  направляющая точка А расположена от поверхности тела на расстоянии  $10 \geq X_0 = \frac{1}{Bi} \geq 0,01$ .

Далее рассмотрим два крайних случая развития температурного поля:

– при бесконечно большой интенсивности внешнего теплообмена  $Bi \rightarrow \infty$  ( $Bi > 100$ ) (см. рис. 5.13,б);

– при бесконечно малой интенсивности внешнего теплообмена  $Bi \rightarrow 0$  ( $Bi < 0,1$ ) (см. рис. 5.13,в).

### *Температурное поле при $Bi > 100$*

Критерий Био становится бесконечно большим  $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda} \rightarrow \infty$  при бесконечно большом коэффициенте теплоотдачи ( $\alpha \rightarrow \infty$ ), больших размерах тела ( $R \rightarrow \infty$ ) и малом коэффициенте теплопроводности ( $\lambda \rightarrow 0$ ). В этом случае направляющая точка А расположена на поверхности тела, так как расстояние от поверхности тела до нее стремится к нулю  $X_0 = \frac{1}{Bi} \rightarrow 0$ , и поэтому температурное поле при  $Bi \rightarrow \infty$  развивается по закону граничных условий первого рода (рис. 5.13,б). Таким образом, можно сделать вывод о том, что при  $Bi \rightarrow \infty$  граничные условия I рода являются частным случаем граничных условий III рода.

### *Температурное поле при $Bi < 0,1$*

Критерий Био стремится к нулю  $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda} \rightarrow 0$  при бесконечно малом коэффициенте теплоотдачи ( $\alpha \rightarrow 0$ ), малых размерах тела ( $R \rightarrow 0$ ) и большом коэффициенте теплопроводности ( $\lambda \rightarrow \infty$ ). В этом случае направляющая точка А

расположена на бесконечно большом расстоянии от поверхности тела, так как расстояние до нее равно  $X_0 = \frac{1}{Bi} \rightarrow \infty$ , поэтому температурное поле при  $Bi \rightarrow 0$  не изменяется по сечению тела (рис. 5.13,в). Такие тела, у которых перепад по сечению тела равен нулю, называют *термически тонкими* телами. Изменение температуры в любой точке термически тонкого тела во времени подчиняется экспоненциальному закону:

$$\Theta(F_0) = \exp(-k \cdot Bi \cdot F_0), \quad (5.111)$$

где  $k$  – коэффициент формы тела.

**Замечание.** В учебном пособии [40] Л.А. Бровкин выделяет тела простой формы, которые *близки к термически тонким* телам и существуют в интервале значений критерия Био  $0,1 < Bi < 1$ . В этом случае перепад температур по сечению тела простой формы нельзя принимать равным нулю, так как существует значительное отличие температуры поверхности тела  $T_w$  от температуры теплового центра  $T_c$  и от средней температуры тела  $\bar{T}$ . Однако в этом случае можно аппроксимировать закон изменения температуры по сечению тела уравнением квадратной параболы:

$$T(X) = T_w - \Delta T \cdot (1 - X^2), \quad (5.112)$$

где  $X = x_1 / R$  – безразмерная координата:  $\Delta T = T_w - T_c$  – перепад температур по сечению тела.

Применяя закон Фурье (5.5) получим формулу для расчета плотности теплового потока на поверхности *близкого к термически тонкому* телу:

$$q_w = \frac{\lambda}{R} \left. \frac{\partial T(X)}{\partial X} \right|_{X=1} = \frac{2\lambda}{R} \Delta T. \quad (5.113)$$

Из формулы (5.113) следует, что перепад температур по сечению тела равен:

$$\Delta T = \frac{q_w R}{2\lambda}. \quad (5.114)$$

Анализируя формулы (5.112) – (5.114), можно сделать вывод о том, что нагрев тел *близких к термически тонким* телам идет аналогично квазистационарному режиму нагрева при граничных условий II рода.

## **§ 5.5.6. Расчет температурных полей тел простой формы методом сеток**

### **§ 5.5.6.1. Теоретические основы численных методов**

В настоящее время точные аналитические решения *нелинейных* задач тепломассообмена *не получены* из-за отсутствия необходимых для этой процедуры математических методов. Поэтому нелинейные задачи переноса теплоты, массы и импульса решают *приближенно* при помощи численных методов, идея которых была предложена ещё в конце XIX века. Однако широкое применение приближенных численных методов для решения задач технической физики стало возможным благодаря интенсивному развитию компьютеров и их математического обеспечения.

Идея всех численных методов, применяемых для решения дифференциальных уравнений переноса теплоты, массы и импульса, заключается в *дискретизации* пространства расчетной области и в *квантовании* времени при нестационарных процессах.

Непрерывную расчетную область в одно-, дву- или трехмерном пространстве (в зависимости от размерности задачи) заменяют конечными объемами (контрольными объемами, конечными элементами), которые могут быть разной геометрической формы и разных размеров для повышения точности воспроизводства геометрии моделируемого тела. Время нестационарного процесса

теплопереноса квантуют (разбивают) на отдельные временные участки, которые также могут быть разной длительности. В результате такой операции по дискретизации пространства-времени получают *расчетную сетку*, заменяющую непрерывную область изменения параметров. Искомый параметр (температуру, энтальпию, концентрацию, скорость, давление и т.д.) находят для *дискретного* объема в *дискретный* момент времени, получая в результате численного решения набор значений параметра в *виде массива* чисел. Массив расчетных значений искомой физической величины по форме аналогичен массиву экспериментальных значений параметра, измеренных при помощи датчиков параметра и вторичного измерительного прибора. В этом заключается формальное сходство эксперимента на физической модели и вычислительного эксперимента на численной математической модели.

Численную дискретную математическую модель строят, применяя законы сохранения субстанции (теплоты, массы и импульса) для контрольного объема сетки  $\Delta V$  в течение дискретного момента времени  $\Delta t$ , выполняя *аппроксимацию* дифференциальных уравнений по специальным алгоритмам. В этом отличие вычислительного эксперимента на теоретической численной модели от эксперимента на физической модели натурального объекта или его модели «в железе».

Резюмируя всё вышесказанное, можно сделать вывод о том, что вычислительная теплотехника (вычислительная теплофизика, вычислительный теплоперенос, вычислительная гидродинамика) занимает промежуточное положение между *теоретическими* и *экспериментальными* методами исследования физических процессов, потому что, с одной стороны, она базируется на системе дифференциальных уравнений переноса субстанции в частных производных, а с другой – в результате численного расчета получают

набор значений параметров, аналогичный опытным данным. Инженер-экспериментатор устанавливает датчики для измерения физических величин в конкретные точки изучаемого объекта и включает приборы, а инженер-теоретик строит дискретную численную модель процесса и запускает программу на компьютере.

В настоящее время процесс численного моделирования автоматизирован путем создания программно-вычислительных комплексов (ПВК). Процесс моделирования в ПВК заключается в создании геометрической модели, задании достоверных условий однозначности и анализа результатов расчета в табличном и графическом виде. Построение дискретной сетки и создание численной модели полностью автоматизировано, что значительно облегчает процесс математического моделирования.

Однако принципы разработки численных математических моделей, включая построение сетки, создания дискретной модели, реализации алгоритма вычислений для инженера-теплотехника – чрезвычайно необходимая и полезная информация, позволяющая, во-первых, контролировать вычислительный процесс в ПВК и, во-вторых, создавать собственный программный продукт для решения нестандартных задач.

#### **§ 5.5.6.2. Метод сеток для решения краевой задачи теории теплопроводности**

Рассмотрим идею решения задач теплообмена численными методами на примере расчета температурных полей бесконечной (неограниченной) пластины при её нагреве (охлаждении) самым простым и весьма популярным у разработчиков оригинальных вычислительных программ методом конечных разностей (МКР) или методом сеток [10, 33].

**Математическая формулировка линейной краевой задачи теории теплопроводности для бесконечной пластины**

Запишем математическую формулировку линейной краевой задачи теории теплопроводности, которая включает в себя дифференциальное уравнение теплопроводности для бесконечной пластины и условия однозначности. Линейное дифференциальное уравнение теплопроводности в неограниченной пластине имеет вид:

– при наличии внутренних источников или стоков теплоты

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q_v}{c'_p}; \quad (5.115)$$

– при отсутствии внутренних источников ( $q_v = 0$ )

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (5.116)$$

Для получения единственного решения  $T(x, \tau)$  уравнения (5.115) или уравнения (5.116) необходимо знать размер расчетной области пластины  $R$  и время процесса в явном виде, при котором задано конечное время процесса  $\tau_k$ . Заметим, что время нагрева или охлаждения тела можно задать и неявно в виде некоторого условия, например, расчет теплопроводности выполнять до наступления режима теплового равновесия. Физические свойства материала пластины ( $\rho, c_p, \lambda, a$ ) должны быть известны. Для решения уравнения (5.115) также должен быть задан закон изменения мощности внутренних тепловыделений (телопоглощений) в пространстве и во времени  $q_v = f(x, \tau)$ .

Для получения единственного решения дифференциального уравнения теплопроводности необходимо задать и краевые условия (начальное условие и граничные условия).  
Начальное условие:

$$T(x, 0) = T_0 = \text{пост.} \quad (5.117)$$

Граничные условия:

а) в тепловом центре (при симметричном нагреве на оси симметрии, а при несимметричном – на адиабатной поверхности пластины)

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad (5.118)$$

б) ГУ I рода (при нагреве  $T_w > T_0$ , а при охлаждении  $T_w < T_0$ )

$$T(R, \tau) = T_w = \text{пост.}; \quad (5.119)$$

в) ГУ II рода (при нагреве  $q_w > 0$ )

$$\lambda_w \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=R} = q_w = \text{пост.}; \quad (5.120)$$

г) ГУ III рода (при нагреве  $T_f > T_w$  а при охлаждении  $T_f < T_w$ ):

$$\text{– нагрев: } \lambda_w \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=R} = \alpha \cdot (T_f - T_w); \quad (5.121, \text{a})$$

$$\text{– охлаждение: } -\lambda_w \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_w = \alpha \cdot (T_w - T_f). \quad (5.121, \text{б})$$

Далее рассмотрим численное решение трех систем уравнений, моделирующих теплопроводность в бесконечной пластине при граничных условиях I, II и III рода:

– уравнения (5.116), (5.117), (5.118) и (5.119) при граничных условиях I рода;

– уравнения (5.116), (5.117), (5.118) и (5.120) при граничных условиях II рода;

– уравнения (5.116), (5.117), (5.118) и (5.121) при граничных условиях III рода.

Процедура учета источника или стока теплоты в объеме (по сечению) пластины в алгоритме численного расчета (см. уравнение (5.115)) будет рассмотрена ниже.

### *Идея метода сеток. Понятие разностной схемы*

Основная идея метода сеток или метода конечных разностей (МКР) заключается в том, что непрерывную область изменения пространственной переменной  $0 \leq x \leq R$  заменяют совокупностью дискретно расположенных узловых точек  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N$ . При равномерном расположении этих точек в расчетной области их координаты равны  $x_i = i \cdot \Delta x$ , где  $i = 0, 1, \dots, N$  – номер узла по пространству (по координате  $Ox$ ), а  $\Delta x = R / N$  – шаг по пространству (по координате  $Ox$ ) (рис. 5.14,а).

Аналогично вместо непрерывного изменения температуры во времени рассматривают значения температуры в фиксированные моменты времени  $\tau_m = m \cdot \Delta \tau$ , где  $m = 1, 2, \dots, M$  – номер момента времени, а  $\Delta \tau = \tau_k / M$  – шаг по времени,  $\tau_k$  – время процесса,  $M$  – число моментов времени (рис. 5.14,б).

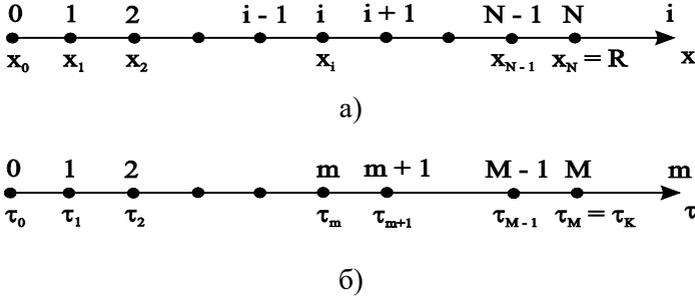


Рис. 5.14. Дискретизация непрерывной области изменения параметров ( $R, \tau_k$ ):

а – дискретизация по пространству; б – дискретизация по времени

Итак, по методу конечных разностей непрерывную область изменения параметров ( $x, \tau$ ) заменяют совокупностью дискретно расположенных узловых точек ( $x_i, \tau_m$ ). В плоскости ( $x, \tau$ ) совокупность узловых точек с координатами  $x_i, \tau_m$  образует прямоугольную сетку, изображенную на рис. 5.15. При этом расчет температурного поля  $T(x, \tau)$  сводится к отысканию сеточной функции  $T_i^m$ , которая *приблизительно* характеризует температуру в узловых точках (в узле с номером  $i$  по пространству в момент времени  $m$ ).

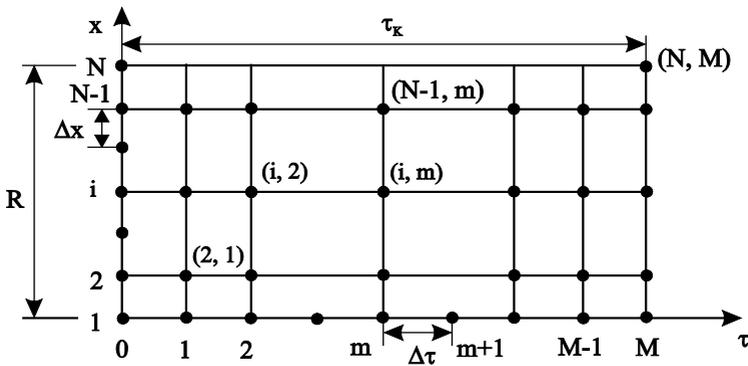


Рис. 5.15. Прямоугольная сетка

При замене непрерывной функции  $T(x, \tau)$  дискретной *сеточной функцией*  $T_i^m$  необходимо заменить (аппроксимировать) дифференциальное уравнение теплопроводности с соответствующими краевыми условиями системой *разностных алгебраических уравнений*, связывающих значения сеточной функции в соседних узловых точках.

Систему алгебраических разностных уравнений, которая связывает значения сеточной функции в соседних узловых точках, называют *разностной схемой* (РС) решения исходной краевой задачи.

### ***Принцип построения и основные характеристики разностных схем***

При расчете температурного поля твердого тела методом сеток возникает вопрос: «Как построить разностную схему решения краевой задачи теории теплопроводности?» В принципе, можно построить бесчисленное множество разностных схем, отличающихся по точности и эффективности, потому что переход от исходной дифференциальной задачи к системе алгебраических разностных уравнений можно осуществить разными способами, описанными ниже. Однако, очевидно, что разностную схему строить нужно таким образом, чтобы погрешность между приближенным (сеточной функцией) и точными значениями температуры стремилась к нулю:

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta \tau) = |T_i^m - T(x_i, \tau_m)| \rightarrow 0 \quad (5.122)$$

при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta \tau \rightarrow 0$ ,

где  $T_i^m$  – сеточная функция, которая приближенно характеризует истинное значение температуры в  $i$ -ом пространственном узле в  $m$ -й момент времени;  $T(x_i, \tau_m)$  – истинное

значение температуры в точке с координатами  $(x_i, \tau_m)$ ;

$\Delta x$  – шаг по координате  $Ox$ ;  $\Delta \tau$  – шаг по времени.

При выполнении условия (5.122) делают вывод о том, что численное решение *сходится* к точному решению, и разностные схемы называют *сходящимися* разностными схемами.

Существует несколько характеристик (свойств) разностных схем, основными из которых являются *сходимость*, *аппроксимация*, *устойчивость* и *консервативность*.

*Сходимость* есть стремление численного решения к точному при стремлении шагов сетки к своему минимальному значению, в пределе к нулю  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta \tau \rightarrow 0$ . Точность разностной схемы характеризуют *порядком точности*. Говорят, что разностная схема имеет  $\ell$ -й порядок точности по координате и  $k$ -й порядок точности по времени, если для достаточно малых значений  $\Delta x$  и  $\Delta \tau$  выполняется условие:

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta \tau) \leq C(\Delta x^\ell + \Delta \tau^k), \quad (5.123)$$

где  $C = \text{const} > 0$ .

В математике условие (5.123) записывают как

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta \tau) = O(\Delta x^\ell + \Delta \tau^k) \quad (5.124)$$

и говорят, что разностная схема сходится со скоростью  $O(\Delta x^\ell + \Delta \tau^k)$ .

**Замечание.** Выражение  $O(z^\alpha)$  при  $\alpha > 0$  означает величину, для которой  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{O(z^\alpha)}{z^\alpha} = C$  при  $z \rightarrow 0$ .

*Аппроксимация* есть стремление конечно-разностного аналога дифференциального уравнения к исходному дифференциальному уравнению. Аппроксимация

характеризует степень близости разностной схемы к исходной краевой дифференциальной задаче, в данном случае к краевой задаче теории теплопроводности (КЗТТ). Количественную оценку аппроксимации характеризует погрешность аппроксимации  $\gamma(\Delta x, \Delta \tau)$ , которую получают подстановкой точного значения искомой функции (в данном случае температуры) в разностное уравнение при переходе с  $m$ -го на  $(m+1)$ -й временной слой. При этом разностная схема *аппроксимирует* исходную дифференциальную задачу, если  $\gamma(\Delta x, \Delta \tau) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta \tau \rightarrow 0$  с порядком аппроксимации  $\ell$  по координате ( $\Delta x^\ell$ ) и порядком аппроксимации  $k$  по времени ( $\Delta \tau^k$ ):

$$\gamma(\Delta x, \Delta \tau) \leq C(\Delta x^\ell + \Delta \tau^k) = O(\Delta x^\ell + \Delta \tau^k). \quad (5.125)$$

*Устойчивость* разностной схемы характеризует изменение погрешности численного расчета в процессе вычислений. Разностные схемы, у которых погрешность численного решения задачи  $\varepsilon_i^m$  при выполнении расчета не увеличивается (убывает или остается неизменной), называют *устойчивыми* разностными схемами.

*Консервативность* является желательным, но не обязательным свойством разностной схемы. Разностные схемы, которые не нарушают закон сохранения субстанции (теплоты, массы, импульса) называют *консервативными*.

### ***Правило построения разностных схем***

В теории метода сеток существует правило [10, 19]: «*Сходимость* разностной схемы следует из *аппроксимации* и *устойчивости*. При этом порядок точности равен порядку аппроксимации. Чем выше порядок аппроксимации по координате ( $\ell$ ) и порядок аппроксимации по времени ( $k$ ), тем разностная схема (РС) точнее!».

### ***Алгоритм построения разностных схем***

При разработке дискретного аналога дифференциального уравнения необходимо выполнить следующие операции:

– выбрать сетку, задавая шаг по пространству  $\Delta x$  и шаг по времени  $\Delta t$ ;

– построить разностную схему, то есть записать систему алгебраических разностных уравнений для сеточной функции  $T_i^{m+1}$ , которая в общем случае имеет вид

$$T_i^{m+1} = f(T_i^m, T_{i-1}^m, T_{i+1}^m, T_{i-1}^{m+1}, T_{i+1}^{m+1});$$

– определить порядок (погрешность) аппроксимации, равный порядку точности;

– проверить устойчивость разностной схемы;

– сделать вывод о сходимости решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи.

### ***Способы построения разностных схем***

Все методы построения разностных схем можно подразделить на две большие группы: *интегральные* (балансовые) и *разностные*. К *интегральным* методам построения разностных схем относят интегро-интерполяционные методы и метод контрольного объема (метод теплового баланса) [10, 19]. К *разностным* методам построения разностных схем относят метод разложения в ряд Тейлора, метод полиномиальной аппроксимации и метод приближенного расчета производных [10, 19].

Применим простой и наглядный метод *приближенного расчета производных* для аппроксимации второй производной по координате  $\partial^2 T / \partial x^2$  и первой производной по

времени  $\partial T / \partial \tau$ , входящих в дифференциальное уравнение теплопроводности для бесконечной пластины (5.116).

Первую производную по координате можно аппроксимировать тремя основными вариантами (рис. 5.16,а):

а) разность «вперед»

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} + O(\Delta x^1); \quad (5.126)$$

б) разность «назад»

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i = \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x^1); \quad (5.127)$$

в) «центральная» разность

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \quad (5.128)$$

где  $\Delta x$  – шаг по координате;  $O(\Delta x^\ell)$  – ошибка аппроксимации по  $\Delta x$  порядка  $\ell$  [10, 19].

Заметим, что чем выше порядок аппроксимации  $\ell$ , тем меньше ошибка аппроксимации  $O(\Delta x^\ell)$  и, следовательно, в этом случае разностный аналог производной точнее.

Анализируя выражения (5.126), (5.127) и (5.128) можно сделать вывод о том, что «центральная» разность *точнее* аппроксимирует первую производную температуры по координате, так как имеет *второй* порядок аппроксимации, а разность «вперед» и разность «назад» – *первый* порядок аппроксимации.

Задавая коэффициент веса по координате для разности «вперед» и разности «назад», можно построить бесконечное множество разностных аналогов по координате:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i \approx \beta \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} + (1 - \beta) \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x}, \quad (5.129)$$

где  $0 \leq \beta \leq 1$  – весовой коэффициент по координате.

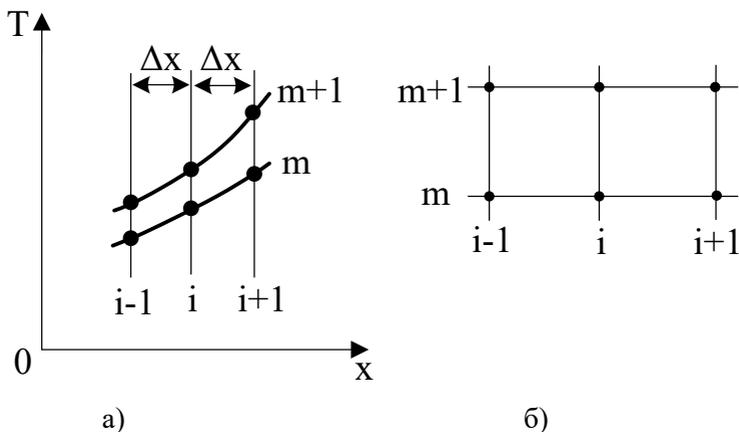


Рис. 5.16. К расчету разностных аналогов производных по координате:

а – фрагмент температурного поля; б – шаблон разностной сетки

Задавая разные значения  $\beta$ , получаем разные аналоги первой производной по координате. Например, при  $\beta = 1$  находим разность «вперед», при  $\beta = 0$  – разность «назад», а при  $\beta = 0,5$  получаем «центральную» разность:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i \approx \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}, \quad (5.129,а)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i \approx \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x}, \quad (5.129,б)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x}, \quad (5.129,в)$$

Разностный аналог второй производной по координате получают как разность между разностью «вперед» и разностью «назад»:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_i &= \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right|_i = \frac{\Delta}{\Delta x} \left( \frac{\Delta T}{\Delta x} \right) + O(\Delta x^2) = \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} - \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} \right] + O(\Delta x^2) = \quad (5.130) \\ &= \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \end{aligned}$$

где  $O(\Delta x^2)$  – второй порядок аппроксимации по координате.

Разностный аналог производной по времени имеет *первый* порядок аппроксимации по времени:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \tau} \right|_i = \frac{T_i^{m+1} - T_i^m}{\Delta \tau} + O(\Delta \tau^1), \quad (5.131)$$

где  $O(\Delta \tau^1)$  – первый порядок аппроксимации по времени.

Подставляя выражения для расчета производных (5.130) и (5.131) в дифференциальное уравнение теплопроводности (5.116), получаем:

$$\frac{T_i^{m+1} - T_i^m}{\Delta \tau} = a \frac{T_{i+1}^* - 2T_i^* + T_{i-1}^*}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2 + \Delta \tau^1), \quad (5.132)$$

где  $O(\Delta x^2 + \Delta \tau^1)$  – порядок аппроксимации дифференциального уравнения теплопроводности (5.116).

Принимая допущение о малости ошибки аппроксимации  $O(\Delta x^2 + \Delta \tau^1) \rightarrow 0$ , конечно-разностный аналог дифференциального уравнения для бесконечной пластины принимает вид:

$$\frac{T_i^{m+1} - T_i^m}{\Delta\tau} = a \frac{T_{i+1}^* - 2T_i^* + T_{i-1}^*}{\Delta x^2}, \quad 1 \leq i \leq N-1. \quad (5.133)$$

В правой части системы алгебраических разностных уравнений (5.133) не указан момент времени (верхний индекс у температур обозначен символом «\*»), в который надо рассчитывать температуру. Задавая весовой коэффициент по времени в интервале  $0 \leq \mu \leq 1$ , можно построить бесконечно много разностных схем по времени на интервале  $\Delta\tau$  для всех узлов по пространству:

$$T^* = \mu T^{m+1} + (1 - \mu) T^m. \quad (5.134)$$

В расчетах тепломассообмена наиболее часто применяют три разностные схемы аппроксимации дифференциального уравнения теплопроводности по времени (рис. 5.17):

а) *явную* разностную схему (ЯРС), для которой весовой коэффициент в формуле (5.134) равен нулю ( $\mu = 0$ ), и поэтому  $T^* = T^m$ ;

б) *чисто неявную* разностную схему (ЧНРС), для которой весовой коэффициент в формуле (5.134) равен единице ( $\mu = 1$ ), и поэтому  $T^* = T^{m+1}$ ;

в) разностную схему Кранка-Николсона (РСКН), для которой весовой коэффициент в формуле (5.134) равен  $\mu = 0,5$  и поэтому  $T^* = 0,5T^{m+1} + 0,5T^m$ .

Анализируя рис. 5.17 можно увидеть, что при использовании явной разностной схемы (ЯРС) при переходе с  $m$ -го на  $(m+1)$ -й временной слой в течение шага по времени  $\Delta\tau$  разностная температура остается равной температуре на предыдущем временном слое  $m$  ( $T^* = T^m$ ) (линия 1 на рис. 5.17). При использовании чисто неявной разностной схемы при переходе с  $m$ -го на  $(m+1)$ -й временной слой в течение

шага по времени  $\Delta\tau$  разностная температура равна неизвестной температуре на следующем  $(m+1)$ -ом временном слое ( $T^* = T^{m+1}$ ) (линия 2 на рис. 5.17). При использовании разностной схемы Кранка-Николсона (РСК-Н) в правой части разностного уравнения (5.133) в течение времени  $\Delta\tau$  применяют среднеарифметическую температуру  $T^* = 0,5(T^{m+1} + T^m)$

**Замечание.** Разностная схема Кранка-Николсона (РСК-Н) предложена английскими учеными Джоном Кранком (J. Crank) и Филиппом Николсоном (F. Nicholson) и опубликована в 1947 году [41].

Все разностные схемы с коэффициентом веса по времени больше нуля, но меньше или равном единице ( $0 < \mu \leq 1$ ) называют *неявными* разностными схемами.

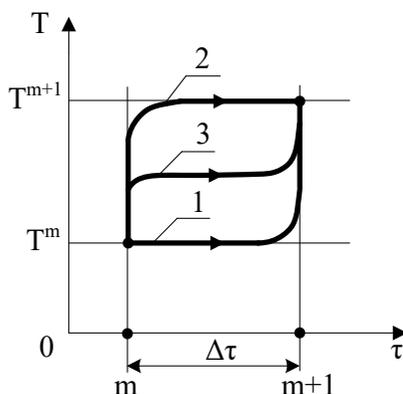


Рис. 5.17. Аппроксимация дифференциального уравнения теплопроводности по времени:  
1 – ЯРС; 2 – ЧНРС; 3 – РСКН

Шаблоны явной разностной схемы (ЯРС), чисто неявной разностной схемы (ЧНРС) и разностной схемы Кранка-Николсона (РСК-Н) показаны рис. 5.18.

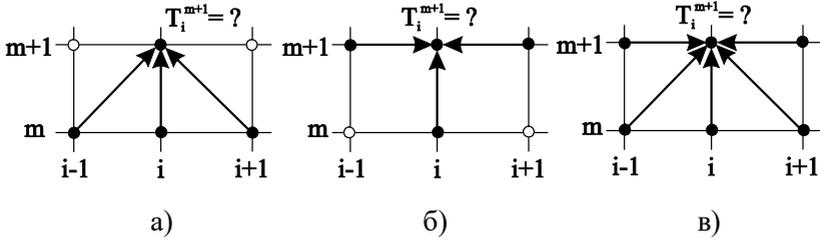


Рис. 5.18. Шаблоны основных разностных схем:  
а – ЯРС; б – ЧНРС; в – РСК-Н

Шаблон разностной схемы представляет собой фрагмент сетки, на котором показано, какие разностные температуры используют для расчета искомой температуры  $T_i^{m+1}$  в  $i$ -ом узле по координате в  $(m+1)$ -й момент времени.

Анализ рис. 5.18,а показывает, что при использовании явной разностной схемы (ЯРС) искомую температуру  $T_i^{m+1}$  рассчитывают по значению трех температур  $T_{i-1}^m$ ,  $T_i^m$ ,  $T_{i+1}^m$  с предыдущего временного слоя, которые уже были рассчитаны ранее, поэтому эту схему и называют *явной* разностной схемой. В этом случае  $T_i^{m+1} = f(T_{i-1}^m, T_i^m, T_{i+1}^m)$  и ЯРС является *четырёхточечной* разностной схемой.

Анализ рис. 5.18,б показывает, что при использовании *чисто неявной* разностной схемы (ЧНРС) искомую температуру  $T_i^{m+1}$  рассчитывают по значению одной температуры  $T_i^m$  с предыдущего временного слоя и двух температур  $T_{i-1}^{m+1}$  и  $T_{i+1}^{m+1}$  со следующего расчетного временного

слоя  $(m+1)$ . В этом случае  $T_i^{m+1} = f(T_{i-1}^{m+1}, T_i^m, T_{i+1}^{m+1})$  и ЧНРС также является *четырёхточечной* разностной схемой.

Анализ рис. 5.18,в показывает, что при использовании разностной схемы Кранка–Николсона (РСК-Н) искомую температуру  $T_i^{m+1}$  рассчитывают по значению трех температур  $T_{i-1}^m, T_i^m, T_{i+1}^m$  с предыдущего временного слоя и двух температур  $T_{i-1}^{m+1}$  и  $T_{i+1}^{m+1}$  со следующего расчетного временного слоя  $(m+1)$ . В этом случае  $T_i^{m+1} = f(T_{i-1}^m, T_i^m, T_{i+1}^m, T_{i-1}^{m+1}, T_{i+1}^{m+1})$  и РСК-Н является *шеститочечной* разностной схемой.

В отличие от ЯРС и ЧНРС, которые имеют порядок аппроксимации  $O(\Delta x^2 + \Delta \tau^1)$ , разностная схема Кранка-Николсона имеет второй порядок аппроксимации по координате и второй порядок аппроксимации по времени  $O(\Delta x^2 + \Delta \tau^2)$  и поэтому является более точной по сравнению с явной (ЯРС) и чисто неявной (ЧНРС) разностными схемами.

Для трех основных разностных схем конечно-разностный аналог дифференциального уравнения (5.133) принимает вид:

а) явная разностная схема

$$\frac{T_i^{m+1} - T_i^m}{\Delta \tau} = a \frac{T_{i+1}^m - 2T_i^m + T_{i-1}^m}{\Delta x^2}; \quad (5.135)$$

б) чисто неявная разностная схема

$$\frac{T_i^{m+1} - T_i^m}{\Delta \tau} = a \frac{T_{i+1}^{m+1} - 2T_i^{m+1} + T_{i-1}^{m+1}}{\Delta x^2}; \quad (5.136)$$

в) разностная схема Кранка-Николсона

$$\frac{T_i^{m+1} - T_i^m}{\Delta\tau} = a \left( \frac{1}{2} \frac{T_{i+1}^{m+1} - 2T_i^{m+1} + T_{i-1}^{m+1}}{\Delta x^2} + \frac{1}{2} \frac{T_{i+1}^m - 2T_i^m + T_{i-1}^m}{\Delta x^2} \right). \quad (5.137)$$

### § 5.5.6.3. Явная разностная схема решения краевой задачи теории теплопроводности

Применим явную разностную схему для расчета температурного поля при симметричном нагреве или охлаждении бесконечной пластины при граничных условиях I, II, III рода и при отсутствии внутренних источников теплоты. Математическая формулировка данной краевой задачи теории теплопроводности задачи представлена уравнениями (5.116) – (5.121).

Конечно-разностный аналог дифференциального уравнения теплопроводности (5.116) получен выше и представлен формулой (5.135). Явная разностная схема получила своё название, потому что искомую температуру (сеточную функцию)  $T_i^{m+1}$  можно выразить явно из сеточного уравнения (5.135) по известным температурам  $T_{i-1}^m$ ,  $T_i^m$  и  $T_{i+1}^m$  на предыдущем временном слое (см. рис. 5.18,а):

$$T_i^{m+1} = fT_{i-1}^m + (1 - 2f)T_i^m + fT_{i+1}^m, \quad (5.138)$$

где  $i = 1, \dots, N - 1$  – номера внутренних узлов сетки;  $f = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}$

– разностный критерий Фурье.

По формуле (5.138) выполняют расчет температуры во внутренних узлах сетки с номерами  $i = 1, \dots, N - 1$ .

Для выделения единственного решения дифференциального уравнения теплопроводности задают условия

однозначности, которые включают в себя краевые условия (начальное и граничные условия).

В начальный момент времени ( $m = 0$ ) всем узлам сетки по координате  $i = 0, 1, \dots, N - 1, N$  необходимо присвоить значение температуры согласно заданному начальному условию (5.117):

$$T_i^{m=0} = T_0 = \text{пост.} \quad (5.139)$$

**Замечание.** При использовании метода сеток можно задавать любой закон начального температурного поля  $T_0 = f(x_i)$ , который можно выразить аналитически, графически или таблично. В этом случае дискретное начальное распределение температур имеет вид:

$$T_i^{m=0} = T_0(x_i). \quad (5.140)$$

На левой и правой границах расчетной области разностную аппроксимацию граничных условий выполняют по шаблонам ЯРС, показанным на рис 5.19.

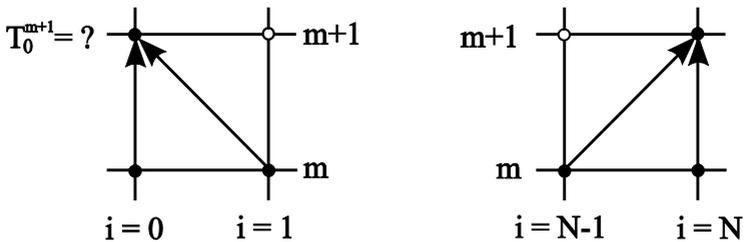


Рис. 5.19. Шаблон ЯРС для граничных узлов сетки:  
а – левая граница; б – правая граница

На левой границе расчетной области (ось симметрии) в точке  $x = 0$  задано условие адиабаты (5.118) при котором температуру в узле  $i = 0$  в  $(m + 1)$ -й момент времени рассчитывают по формуле:

$$T_0^{m+1} = (1 - 2f)T_0^m + 2fT_1^m. \quad (5.141)$$

Температуру на правой границе расчетной области ( $x = R$ ) в граничном узле  $i = N$  в  $(m + 1)$ -й момент времени рассчитывают по разностным формулам:

а) граничные условия I рода (5.119)

$$T_N^{m+1} = T_w = \text{пост}; \quad (5.142)$$

б) граничные условия II рода (5.120)

$$T_N^{m+1} = (1 - 2f)T_N^m + 2f(T_{N-1}^m + \Delta T_{q_w}), \quad (5.143)$$

где  $\Delta T_{q_w} = \frac{q_w^m \cdot \Delta x}{\lambda}$  – изменение температуры за счет поступления теплового потока  $q_w^m$  на внешнюю границу тела;

в) граничные условия III рода (5.121)

$$T_N^{m+1} = [1 - 2f(b + 1)]T_N^m + 2f(T_{N-1}^m + \Delta T_\alpha) \quad (5.144)$$

где  $b = \frac{\alpha \Delta x}{\lambda}$  – разностный критерий Био;  $\Delta T_\alpha = bT_f$  – изменение температуры за счет поступления теплового потока  $q_w^m = \alpha(T_f - T_N^m)$  на бесконечную пластину при нагреве или ухода теплоты  $q_w^m = \alpha(T_N^m - T_f)$  при ее охлаждении;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи;  $T_f$  – температура окружающей среды.

Теплопроводность в бесконечной пластине при действии внутренних источников (стоков) теплоты описывается дифференциальным уравнением (5.115), конечно-разностный аналог которого для любого внутреннего узла сетки  $i$  имеет вид:

$$\frac{T_i^{m+1} - T_i^m}{\Delta\tau} = a \frac{T_{i+1}^m - 2T_i^m + T_{i-1}^m}{\Delta x^2} + \frac{q_{v,i}^m}{c'_p}, \quad (5.145)$$

где  $q_{v,i}^m$  – значение мощности внутреннего тепловыделения  $i$ -ом узле по пространству в  $m$ -й момент времени.

Выражая из разностного уравнения (5.145) неизвестную температуру  $T_i^{m+1}$ , получим:

$$T_i^{m+1} = fT_{i-1}^m + (1 - 2f)T_i^m + fT_{i+1}^m + \Delta T_{q_{v,i}}, \quad (5.146)$$

где  $i = 1, \dots, N-1$  – номера внутренних узлов сетки.

Слагаемое  $\Delta T_{q_{v,i}}$ , учитывающее действие внутренних источников (стоков) теплоты, имеет вид:

$$\Delta T_{q_{v,i}} = \frac{q_{v,i}^m}{\rho c_p} \Delta\tau = \frac{q_{v,i}^m}{c'_p} \Delta\tau, \quad (5.147)$$

где  $\Delta T_{q_{v,i}}$  – изменение температуры за счет действия внутреннего источника теплоты  $q_v$  в  $i$ -м узле пространственной сетки за время  $\Delta\tau$ ;  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $c_p$  – удельная массовая изобарная теплоемкость, Дж/(кг·К);  $c'_p$  – удельная объемная изобарная теплоемкость, Дж/(м<sup>3</sup>·К).

При действии в граничных узлах разностной сетки  $i = 0$  (левая граница) и  $i = N$  (правая граница) внутреннего источника (стока) теплоты мощностью  $q_v$  в правую часть разностных уравнений (5.141), (5.143) и (5.144) также необходимо добавить слагаемое  $\Delta T_{q_{v,i=0}}$  или  $\Delta T_{q_{v,i=N}}$ .

#### § 5.5.6.4. Свойства явной разностной схемы

1. Явная разностная схема аппроксимирует краевую задачу теории теплопроводности с первым порядком точности по времени и вторым порядком точности по координате  $O(\Delta\tau + \Delta x^2)$ .

2. Явная разностная схема имеет ограничение на устойчивость.

*Устойчивыми* называют разностные схемы, при использовании которых погрешность численного решения не возрастает, то есть остается постоянной или уменьшается. В противном случае разностные схемы называют *неустойчивыми*.

Устойчивой явная разностная схема будет при выполнении условия:

а) при граничных условиях I и II рода

$$f \leq \frac{1}{2}; \quad (5.148)$$

б) при граничных условиях III рода

$$f \leq \frac{1}{2(b+1)}, \quad (5.149)$$

где  $f = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}$  – разностный критерий Фурье;  $b = \frac{\alpha\Delta x}{\lambda}$  – разностный критерий Био.

#### § 5.5.6.5. Алгоритм применения явной разностной схемы

1. Строят разностную сетку по координате. Задавая число слоев разбиения по координате  $N$ , рассчитывают шаг по пространству:

$$\Delta x = \frac{R}{N}, \quad (5.150)$$

где  $R$  – размер расчетной области.

Число слоев разбиения  $N$  для «ручных» расчетов на калькуляторе задают в интервале  $4 \leq N \leq 10$ . При этом точность таких расчетов невелика. Число  $N$  для расчетов на компьютере выбирают по принципу Рунге [10]. Применяя принцип Рунге, задают базовое число слоев сетки по координате  $N$  (например  $N = 10$ ) и выполняют серию расчетов температурного поля с последовательным удвоением числа слоев  $2N, 4N, 8N$  и т.д. до результата, при котором погрешность численного расчета будет меньше наперед заданного значения.

**2.** Строят разностную сетку по времени. При этом шаг по времени  $\Delta\tau$  при использовании явной разностной схемы необходимо задавать, учитывая условие устойчивости (5.148) или (5.149):

а) при граничных условиях I и II рода

$$\frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta\tau \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{a}; \quad (5.151)$$

б) при граничных условиях III рода

$$\frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2(b+1)} \Rightarrow \Delta\tau \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{a(b+1)}. \quad (5.152)$$

Анализируя формулы (5.151) и (5.152), можно сделать вывод о том, что при уменьшении шага по координате  $\Delta x$  в  $n$  раз для сохранения устойчивости явной разностной схемы необходимо уменьшить шаг по времени  $\Delta\tau$  в  $n^2$  раз, а это приводит к резкому увеличению числа узлов сетки и к росту объема вычислений. На основании этого свойства ЯРС некоторые ученые считают явную разностную схему менее эффективной по сравнению с другими разностными схемами. Однако это утверждение весьма спорно, потому

что, во-первых, в своей области устойчивости эффективность ЯРС превышает эффективность других разностных схем и, во-вторых, эффективность применения явной разностной схемы зависит от конкретной постановки задачи расчета теплопроводности (заданных условий однозначности).

3. В начальный момент времени  $m = 0$  ( $\tau_m = 0$ ) всем узлам сетки ( $i = 0, 1, \dots, N-1, N$ ) присваивают значение температуры по формулам (5.139) или (5.140).

Обратим внимание, что при граничных условиях первого рода температуру на границе расчетной области в начальный момент времени  $\tau_m = 0$  рассчитывают по формуле (5.142), потому что по определению ГУ I рода температура на границе расчетной области в начальный момент времени становится равной  $T_w$ .

4. Начинают численный расчет нестационарной теплопроводности. Для этого выполняют шаг во времени  $\Delta\tau$  и определяют расчетный номер момента времени и текущее время процесса:

$$m + 1 = \quad ; \tau_{m+1} = (m + 1)\Delta\tau, \quad (5.153)$$

где  $m$  – предыдущий момент времени.

5. Рассчитывают температуру  $T_0^{m+1}$  на левой границе (узел  $i = 0$ ) по формуле (5.141) и температуру  $T_N^{m+1}$  на правой границе расчетной области (узел  $i = N$ ) в  $(m+1)$ -й момент времени по формулам (5.142), (5.143) и (5.144) в зависимости от заданного рода граничных условий.

6. Рассчитав температуру на границах расчетной области  $T_0^{m+1}$  и  $T_N^{m+1}$ , находят температуру во внутренних узлах

сетки  $i = 1, \dots, N-1$ ) в  $(m+1)$ -й момент времени по формуле (5.138).

7. Выполняют анализ окончания вычислительного процесса:

а) либо по времени процесса

$$\tau_{m+1} < \tau_k ? ; \quad (5.154)$$

б) либо по значению температуры в заданной точке тела

$$T_{i=n}^{m+1} < T_{i=n}^{\text{зад}} ? , \quad (5.155)$$

где  $\tau_k$  – время нагрева или охлаждения;  $i = n$  – номер узла, в котором задана конечная температура  $T_{i=n}^{\text{зад}}$ .

Если условие (5.154) или условие (5.155) выполняются, то расчет температуры во всех узлах разностной сетки повторяют с пункта 4 алгоритма, предварительно изменив номер расчетного момента времени по формуле:

$$m = m + 1. \quad (5.156)$$

**Замечание 1.** Расчет температурного поля бесконечного цилиндра и шара методом сеток по явной разностной схеме выполняют по алгоритму расчета температурного поля бесконечной пластины. Однако для учета кривизны пространства у цилиндра и шара температуру в внутренних узлах сетки ( $i=1, 2, \dots, N-1$ ) рассчитывают по формуле:

$$T_i^{m+1} = f(1 - I_k^-) T_{i-1}^m + \left[ 1 - 2f(1 + 0,5I_k^+ - 0,5I_k^-) \right] T_i^m + f(1 + I_k^+) T_{i+1}^m, \quad (5.157)$$

в которой комплексы, учитывающие кривизну сетки равны

$$I_k^- = (k-1) \frac{0,5}{i-0,5}; \quad I_k^+ = (k-1) \frac{0,5}{i+0,5},$$

где  $k$  – коэффициент формы тела. Заметим, что при  $k = 1$  формула (5.157) для бесконечного цилиндра и шара и формула (5.138) для бесконечной пластины совпадают.

**Замечание 2.** Разностные формулы для расчета температурного поля бесконечной пластины при *несимметричных* граничных условиях представлены в первом издании учебника [33].

**Замечание 3.** Полный пакет разностных формул для расчета нестационарной теплопроводности в телах простой формы (бесконечная пластина, бесконечный цилиндр и шар) при использовании явной разностной схемы (ЯРС), чисто неявной разностной схемы (ЧНРС) и разностной схемы Кранка-Николсона (РСК-Н) приведены в методических указаниях [20].

### **Контрольные вопросы по материалам пятой главы**

1. Назовите элементарные способы переноса теплоты.
2. Напишите основной закон теплопроводности – закон Фурье.
3. Напишите основной закон теплопроводности в энергетической форме.
4. Назовите физический смысл коэффициента температуропроводности. Напишите формулу функциональной связи  $a = f(\lambda, \rho, c_p)$ .
5. Назовите физический смысл коэффициента теплопроводности. От каких параметров зависит коэффициент теплопроводности.
6. Назовите идею вывода дифференциального уравнения теплопроводности.
7. Напишите дифференциальное уравнение теплопроводности в векторной форме.
8. Напишите линейное дифференциальное уравнение теплопроводности.
9. Напишите дифференциальное уравнение теплопроводности для тел простой формы.

10. Напишите дифференциальное уравнение Фурье для стационарного процесса теплопроводности.
11. Напишите дифференциальное уравнение Фурье в безразмерной форме.
12. Назовите физический смысл критерий Померанцева.
13. Перечислите условия однозначности для решения краевой задачи теории теплопроводности.
14. Дайте определение начального условия (НУ).
15. Дайте определение граничных условий I рода.
16. Дайте определение граничных условий II рода.
17. Дайте определение граничных условий III рода.
18. Дайте определение граничных условий IV рода.
19. Нарисуйте графики изменения температурного поля при граничных условиях I рода.
20. Нарисуйте графики изменения температурного поля при граничных условиях II рода.
21. Нарисуйте графики изменения температурного поля при граничных условиях III рода.
22. Укажите особенности установившегося режима нагрева при ГУ I рода.
23. Укажите особенности квазистационарного режима нагрева при ГУ II рода.
24. Укажите особенности регулярного режима нагрева при ГУ III рода.
25. Изобразите общий вид номограммы для графического расчета температурного поля.
26. Дайте характеристику прямой задачи расчета нестационарной теплопроводности по номограммам.
27. Дайте характеристику обратной задачи расчета нестационарной теплопроводности по номограммам.
28. Опишите эксперимент по определению темпа нагрева (охлаждения) тела.
29. Назовите алгоритм расчета температурного поля в телах сложной формы.
30. Нарисуйте график температурного поля в телах простой формы при ГУ III рода и значении критерия Био  $Bi < 0,1$ .

31. Нарисуйте график температурного поля в телах простой формы при ГУ III рода и значении критерия Био  $0,1 \leq Bi \leq 100$ .
32. Нарисуйте график температурного поля в телах простой формы при ГУ III рода и значении критерия Био  $Bi > 100$ .
33. Дайте характеристику термически тонкого тела.
34. Дайте характеристику термически массивного тела.
35. Назовите идею численных методов решения дифференциальных уравнений теплообмена.
36. Назовите сходство и различие теоретических численных методов и экспериментальных методов определения температурного поля.
37. Дайте определения понятия «Разностная схема решения дифференциального уравнения».
38. Перечислите свойства разностных схем.
39. Назовите правило сходимости разностных схем.
40. Напишите конечно-разностный аналог линейного дифференциального уравнения теплопроводности для бесконечной пластины, используя явную разностную схему (ЯРС).
41. Покажите шаблоны разностных схем: ЯРС, ЧНРС, РСК-Н.
42. Назовите свойства явной разностной схемы.
43. Назовите алгоритм применения явной разностной схемы.

## ГЛАВА 6. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ С ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛОТЫ

Рассмотрим процесс стационарной теплопроводности в телах простой формы при равномерном распределении внутренних источников теплоты в объеме тела. Получим теоретическим методом формулы для расчета температурного поля и тепловых потоков при граничных условиях первого и третьего рода.

### § 6.1. Математическая формулировка задачи

Дифференциальное уравнение теплопроводности, моделирующее нестационарный процесс переноса теплоты теплопроводностью в телах произвольной формы получено ранее и имеет вид (5.17):

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}(T)) + q_v,$$

где  $q_v$  – источниковый член дифференциального уравнения, который характеризует мощность внутреннего тепловыделения в объеме тела,  $\text{Дж}/(\text{с} \cdot \text{м}^3) = \text{Вт}/\text{м}^3$ .

При стационарном процессе теплопроводности температурное поле не изменяется во времени ( $\partial T / \partial \tau = 0$ ) и дифференциальное уравнение Фурье принимает вид (5.32):

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}(T)) + q_v = 0.$$

При допущении независимости коэффициента теплопроводности от температуры  $\lambda \neq f(T)$ , дифференциальное уравнение теплопроводности упрощается (5.33):

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(T)) + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 T + \frac{q_v}{\lambda} = 0.$$

Раскрывая значение  $\nabla^2$  для тел простой (классической, канонической) формы получаем уравнение Пуассона, которое в дивергентной форме имеет вид (5.36):

$$\frac{1}{x_1^{k-1}} \frac{d}{dx_1} \left( x_1^{k-1} \frac{dT}{dx_1} \right) + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

или в обычной форме записи (5.37)

$$\frac{d^2T}{dx_1^2} + \frac{k-1}{x_1} \frac{dT}{dx_1} + \frac{q_v}{\lambda} = 0,$$

где  $x_1$  – первая координата в ортогональной системе координат (см. § 1.1), которая имеет смысл  $x_1 = x$  для декартовой системы координат и  $x_1 = r$  для цилиндрической и сферической систем координат, м;  $k$  – коэффициент формы тела:  $k = 1$  – бесконечная пластина;  $k = 2$  – бесконечный цилиндр;  $k = 3$  – шар.

Для решения дифференциального уравнения стационарной теплопроводности, записанного в дивергентной (5.36) или в обычной (5.37) форме записи должны быть заданы условия однозначности:

- расчетный размер тела  $R$ , м;
- коэффициент теплопроводности  $\lambda$ , Вт/(м·К);
- мощность внутреннего источника теплоты, который равномерно распределен по объему тела  $q_v = \text{пост}$ , Вт/м<sup>3</sup>;
- граничные условия:
  - а) на оси симметрии тела (внутренняя граница)  $x_1 = 0$  задано условие адиабаты (5.59):

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = 0;$$

б) на внешней границе тела  $x_1 = R$  заданы граничные условия I и III рода.

Граничные условия I рода при охлаждении тела простой формы в *стационарном* режиме теплопроводности:

$$T(R) = T_w = \text{пост}, \quad (6.1)$$

где  $T_w$  – температура поверхности тела, °С (К).

Граничные условия III рода при охлаждении тела простой формы в стационарном режиме теплопроводности моделируются формулой (3.20):

$$-\lambda_w \left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_w = \alpha \cdot (T_w - T_f),$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи от поверхности тела с температурой  $T_w$  к теплоносителю с температурой  $T_f$ .

Обратим внимание ещё раз, что при расчете *стационарного* процесса теплопроводности время теплообмена и начальное температурное поле задавать не надо.

## § 6.2. Теплопроводность неограниченной пластины с внутренними источниками теплоты

Температурное поле при охлаждении неограниченной пластины с внутренними источниками теплоты при граничных условиях III рода изображено на рис. 6.1. При условиях однозначности, заданных в § 6.1, найдем закон изменения температуры и теплового потока по координате  $Ox$  –  $T(x)$ ,  $Q(x)$  и  $q(x)$ , температуру в тепловом центре  $T_c$  и на поверхности  $T_w$  неограниченной пластины и максимальный перепад температур по сечению пластины  $\Delta T = T_c - T_w$ .

Запишем кратко условие поставленной задачи:

Дано:  $k = 1$ ;  $R = \delta / 2$ ;  $\lambda$ ;  $q_v$ ;  $\alpha$ ;  $T_f$ ;

Найти:  $T(x)$ ;  $T_c$ ;  $T_w$ ;  $\Delta T$ ;  $Q(x)$ ;  $Q_w$ ;  $q(x)$ ;  $q_w$ ,

Дано:  $k = 1$ ;  $R = \delta / 2$ ;  $\lambda$ ;  $q_v$ ;  $\alpha$ ;  $T_f$ ;

где  $\delta$  – толщина бесконечной пластины, м;  $Q_w$  – тепловой поток, уходящий с поверхности бесконечной пластины, Вт;  $q_w$  – плотность теплового потока, уходящего с поверхности бесконечной пластины, Вт/м<sup>2</sup>.

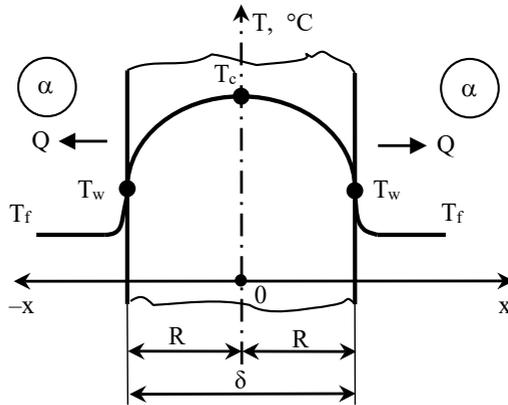


Рис. 6.1. Температурное поле в неограниченной пластине при действии равномерно распределенных внутренних источников теплоты

Напишем дифференциальное уравнение теплопроводности и условия однозначности при симметричном охлаждении неограниченной пластины, в которой действуют равномерно распределенные источники теплоты мощностью  $q_v$ . Дифференциальное уравнение теплопроводности для бесконечной пластины получим, подставляя коэффициент формы  $k = 1$  и заменяя координату  $x_1 = x$  в уравнение (5.37):

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (6.2)$$

Граничное условие (5.59) на внутренней границе расчетной области (на оси симметрии) для бесконечной пластины ( $x_1 = x$ ):

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0. \quad (6.3)$$

Граничное условие I рода (6.1) и граничное условие III рода (3.20) на внешней границе расчетной области бесконечной пластины ( $x_1 = x$ ) имеют вид:

$$\begin{aligned} T(R) &= T_w = \text{пост}; \\ -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=R} &= \alpha(T_w - T_f). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Линейную краевую задачу теории теплопроводности (6.2), (6.3) и (6.4) решим аналитическим методом разделения переменных. Разделяем переменные и интегрируем дифференциальное уравнение (6.2) первый раз:

$$\int \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} \right) \right] dx + \int \frac{q_v}{\lambda} dx = 0; \quad \Rightarrow \frac{dT}{dx} + \frac{q_v x}{\lambda} = C_1$$

или

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q_v x}{\lambda} + C_1. \quad (6.5)$$

Разделяем переменные, интегрируем второй раз и получаем общее решение дифференциального уравнения (6.2):

$$\int dT = -\int \frac{q_v x}{\lambda} dx + \int C_1 dx;$$

$$T = -\frac{q_v x^2}{2\lambda} + C_1 x + C_2. \quad (6.6)$$

Для расчета постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  используем граничные условия (6.1), (6.3) и (6.4). При  $x = 0$  производная  $\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0$  и из выражения (6.5) следует, что постоянная  $C_1 = 0$ . С учетом этого общее решение (6.6) примет вид:

$$T = -\frac{q_v x^2}{2\lambda} + C_2. \quad (6.7)$$

Найдем постоянную интегрирования  $C_2$  из выражения (6.7), записанного для внешней границы пластины с координатой  $x = R$  и температурой  $T(R) = T_w$  (см. формулу (6.1)):

$$C_2 = T_w + \frac{q_v R^2}{2\lambda}. \quad (6.8)$$

Подставляя постоянную интегрирования  $C_2$  в общий интеграл (6.6), получаем решение краевой задачи теории теплопроводности (КЗТТ) при граничных условиях I рода:

$$\begin{aligned} T(x) &= -\frac{q_v x^2}{2\lambda} + T_w + \frac{q_v R^2}{2\lambda} = T_w + \frac{q_v}{2\lambda} (R^2 - x^2) = \\ &= T_w + \frac{q_v R^2}{2\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{x}{R} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Температуру поверхности пластины  $T_w$ , входящую в уравнение (6.9), выразим через температуру флюида  $T_f$  и коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ , используя граничные условия III рода на внешней поверхности пластины (6.4):

$$T_w = T_f - \frac{\lambda}{\alpha} \frac{dT}{dx} \Big|_{x=R}. \quad (6.10)$$

Значение производной  $\frac{dT}{dx} \Big|_{x=R}$  на поверхности пластины ( $x = R$ ) найдем из выражения (6.5), учитывая что постоянная интегрирования  $C_1 = 0$ :

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=R} = -\frac{q_v R}{\lambda}. \quad (6.11)$$

Затем подставляя (6.11) в (6.10), окончательно находим температуру на поверхности пластины:

$$T_w = T_f - \frac{\lambda}{\alpha} \left( -\frac{q_v R}{\lambda} \right) = T_f + \frac{q_v R}{\alpha}. \quad (6.12)$$

Заменяя температуру поверхности тела  $T_w$  в формуле (6.9) выражением (6.12), получим решение дифференциального уравнения теплопроводности (6.2) при граничных условиях III рода:

$$\begin{aligned} T(x) &= T_f + \frac{q_v R}{\alpha} + \frac{q_v R^2}{2\lambda} - \frac{q_v x^2}{2\lambda} = \\ &= T_f + \frac{q_v R}{\alpha} + \frac{q_v}{2\lambda} (R^2 - x^2) = \\ &= T_f + \frac{q_v R}{\alpha} + \frac{q_v R^2}{2\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{x}{R} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Анализ температурного поля неограниченной пластины  $T(x)$  при ГУ I рода (6.9) и при ГУ III рода (6.13) показывает, что температура по сечению пластины изменяется по закону параболы. Температуру в тепловом центре  $T_c$

бесконечной пластины рассчитывают по формуле, получаемой из выражения (6.13) при  $x = 0$ :

$$T_c = T_f + \frac{q_v R}{\alpha} + \frac{q_v R^2}{2\lambda} = T_w + \frac{q_v R^2}{2\lambda}, \quad (6.14)$$

где  $T_w$  – температура поверхности тела, рассчитанная по формуле (6.12).

Перепад температур по сечению пластины равен:

$$\Delta T = T_c - T_w = \frac{q_v R^2}{2\lambda}. \quad (6.15)$$

Мы нашли температурное поле в бесконечной пластине при равномерном распределении по ее сечению внутренних источников теплоты и тем самым решили *первую* задачу расчета теплообмена. На *втором* этапе расчета теплообмена найдем плотность теплового потока  $q(x)$  в бесконечной пластине с внутренними источниками теплоты, применяя закон Фурье (5.2) к температурному полю (6.13):

$$q(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda \left( -\frac{2q_v x}{2\lambda} \right) = q_v x, \quad (6.16)$$

где  $\text{grad}(T) = \frac{dT}{dx}$  – градиент температурного поля в бесконечной пластине.

Плотность теплового потока в тепловом центре  $x = 0$  и на поверхности пластины  $x = R$  соответственно равны:

$$q_c = 0; \quad q_w = q_v R. \quad (6.17)$$

Тепловой поток, уходящий с поверхности неограниченной пластины:

$$Q_w = q_w \cdot 2F = q_v R \cdot 2F = q_v V, \quad (6.18)$$

где  $V = 2R \cdot F = \delta \cdot F$ , – объем пластины,  $m^3$ ;  $\delta = 2R$  – толщина пластины,  $m$ ;  $F$  – площадь поверхности пластины,  $m^2$ ;  $R$  – размер расчетной области, равный половине толщины пластины  $\delta$  при симметричном охлаждении пластины,  $m$ .

### § 6.3. Теплопроводность неограниченного цилиндра с внутренними источниками теплоты

Температурное поле при охлаждении неограниченного цилиндра с внутренними источниками теплоты при граничных условиях III рода изображено на рис. 6.2. При условиях однозначности, заданных в § 6.1, найдем закон изменения температуры и теплового потока вдоль радиуса цилиндра –  $T(r)$  и  $Q(r)$ , линейную  $q_\ell$  и поверхностную  $q_w$  плотности теплового потока, уходящего с поверхности цилиндра, температуру в центре  $T_c$  и на поверхности  $T_w$  неограниченного цилиндра и максимальный перепад температур по сечению цилиндра  $\Delta T = T_c - T_w$ .

Запишем кратко условие поставленной задачи:

Дано:  $k = 2$ ;  $R = r_{\text{ц}}$ ;  $\lambda$ ;  $q_v$ ;  $\alpha$ ;  $T_f$ ;

Найти:  $T(r)$ ;  $T_c$ ;  $T_w$ ;  $\Delta T$ ;  $Q(r)$ ;  $Q_w$ ;  $q_\ell$ ;  $q_w$ ,

где  $r_{\text{ц}} = D/2$  – радиус цилиндра;  $D$  – диаметр цилиндра.

Напишем дифференциальное уравнение теплопроводности и граничные условия при охлаждении неограниченного цилиндра, в котором действуют равномерно распределенные источники теплоты мощностью  $q_v$ .

Дифференциальное уравнение теплопроводности для бесконечного цилиндра получим, подставляя коэффициент формы  $k = 2$  и заменяя координату  $x_1 = r$  в дифференциальном уравнении (5.36), записанном в дивергентной форме, и в дифференциальном уравнении (5.37):

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{q_v}{\lambda} = 0; \quad (6.19)$$

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (6.20)$$

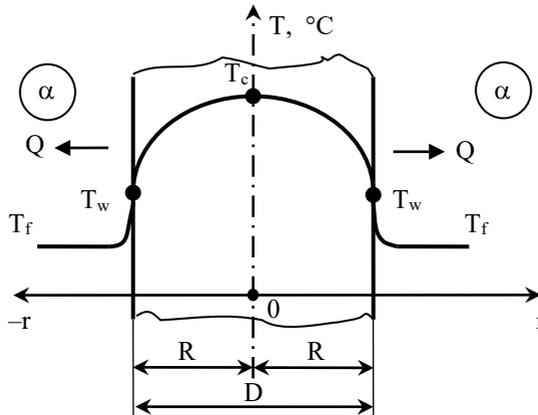


Рис. 6.2. Температурное поле в неограниченном цилиндре при действии равномерно распределенных внутренних источников теплоты

Граничное условие на внутренней границе расчетной области (6.3) для бесконечного цилиндра ( $x_1 = r$ ):

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (6.21)$$

Граничное условие I рода (6.1) и граничное условие III рода (3.20) на внешней границе расчетной области бесконечного цилиндра ( $x_1 = r$ ):

$$T(R) = T_w = \text{пост};$$

$$-\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R} = \alpha(T_w - T_f). \quad (6.22)$$

Линейную краевую задачу теории теплопроводности (6.19), (6.21) и (6.22) решим аналитическим методом разделения переменных. Разделяем переменные и интегрируем дифференциальное уравнение (6.19) первый раз, предварительно умножив оба слагаемых уравнения на текущий радиус  $r$ :

$$\int \left[ \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) \right] dr + \int \frac{q_v r}{\lambda} dr = 0;$$

$$r \frac{dT}{dr} + \frac{q_v r^2}{2\lambda} = C_1. \quad (6.23)$$

Делим на « $r$ » все члены последнего дифференциального уравнения:

$$\frac{dT}{dr} + \frac{q_v r}{2\lambda} = \frac{C_1}{r}; \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{q_v r}{2\lambda} + \frac{C_1}{r}. \quad (6.24)$$

Разделяем переменные и, интегрируя второй раз, находим общий интеграл дифференциального уравнения теплопроводности (6.19):

$$\int dT = -\int \frac{q_v r}{2\lambda} dr + \int \frac{C_1}{r} dr;$$

$$T(r) = -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2. \quad (6.25)$$

Подставляя граничное условие (6.21) на оси цилиндра при  $r = 0$  в (6.23) получим  $C_1 = 0$ . Тогда общее решение (6.25) примет вид:

$$T(r) = -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_2. \quad (6.26)$$

Из последнего выражения, записанного для поверхности цилиндра ( $r = R$ ) с учетом обозначения  $T(R) = T_w$ , имеем:

$$C_2 = T_w + \frac{q_v R^2}{4\lambda}. \quad (6.27)$$

Подставляя  $C_2$  в общий интеграл (6.26), получаем решение дифференциального уравнения теплопроводности (6.19) при граничных условиях I рода:

$$\begin{aligned} T(r) &= -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + T_w + \frac{q_v R^2}{4\lambda} = T_w + \frac{q_v}{4\lambda} (R^2 - r^2) = \\ &= T_w + \frac{q_v R^2}{4\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Температуру поверхности цилиндра  $T_w$ , входящую в уравнение (6.28), выразим через температуру флюида  $T_f$  и коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ , используя граничные условия III рода на внешней поверхности цилиндра (6.22):

$$T_w = T_f - \frac{\lambda}{\alpha} \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R}. \quad (6.29)$$

Значение производной  $\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R}$  на поверхности цилиндра ( $r = R$ ) найдем из выражения (6.24) с учетом  $C_1 = 0$ :

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R} = -\frac{q_v R}{2\lambda}. \quad (6.30)$$

Затем, подставляя (6.30) в (6.29), окончательно находим температуру на поверхности цилиндра:

$$T_w = T_f - \frac{\lambda}{\alpha} \left( -\frac{q_v R}{2\lambda} \right) = T_f + \frac{q_v R}{2\alpha}. \quad (6.31)$$

Заменяя температуру поверхности тела  $T_w$  в формуле (6.28) выражением (6.31), получим решение дифференциального уравнения теплопроводности (6.19) при граничных условиях III рода:

$$\begin{aligned} T(r) &= T_f + \frac{q_v R}{2\alpha} + \frac{q_v R^2}{4\lambda} - \frac{q_v r^2}{4\lambda} = \\ &= T_f + \frac{q_v R}{2\alpha} + \frac{q_v}{4\lambda} (R^2 - r^2) = \\ &= T_f + \frac{q_v R}{2\alpha} + \frac{q_v R^2}{4\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Анализ температурного поля неограниченного цилиндра  $T(r)$  при граничных условиях I рода (6.28) и при граничных условиях III рода (6.32) показывает, что температура по сечению цилиндра изменяется по закону параболы.

Температуру в тепловом центре  $T_c$  бесконечного цилиндра рассчитывают по формуле, получаемой из выражения (6.32) при  $r = 0$ :

$$T_c = T_f + \frac{q_v R}{2\alpha} + \frac{q_v R^2}{4\lambda} = T_w + \frac{q_v R^2}{4\lambda}, \quad (6.33)$$

где  $T_w$  – температура поверхности тела, рассчитанная по формуле (6.31).

Перепад температур по сечению бесконечного цилиндра равен:

$$\Delta T = T_c - T_w = \frac{q_v R^2}{4\lambda}. \quad (6.34)$$

Рассчитав температурное поле, перейдем к выводу формул для расчета теплового потока  $Q$ , поверхностной плотности теплового потока  $q_w$  и линейной плотности теплового потока  $q_\ell$ .

Тепловой поток найдем, используя закон Фурье (5.2) и уравнение температурного поля (6.32):

$$\begin{aligned} Q(r) &= -\lambda \frac{dT}{dr} \cdot F(r) = -\lambda \left[ -\frac{2q_v r}{4\lambda} \right] \cdot 2\pi r \ell = \\ &= q_v \cdot \pi r^2 \ell = q_v \cdot V(r), \end{aligned} \quad (6.35)$$

где  $\text{grad}(T) = \frac{dT}{dr}$  – градиент температурного поля в бесконечном цилиндре;  $F(r) = 2\pi r \ell$  – площадь боковой поверхности цилиндра радиусом  $r$ ,  $m^2$ ;  $V(r) = \pi r^2 \ell$  – объем цилиндра радиусом  $r$ ,  $m^3$ ;  $\ell$  – длина (высота) цилиндра,  $m$ .

Тепловой поток, уходящий с поверхности цилиндра равен:

$$Q_w = q_v \cdot \pi R^2 \ell = q_v \cdot V, \quad (6.36)$$

где  $V = \pi R^2 \ell$  – объем цилиндра,  $m^3$ ;  $R$  – радиус цилиндра,  $m$ .

Линейная плотность теплового потока на поверхности цилиндра равна:

$$q_\ell = \frac{Q_w}{\ell} = \frac{q_v \cdot \pi R^2 \ell}{\ell} = q_v \pi R^2$$

или

$$q_\ell = q_w 2\pi R, \quad (6.37)$$

где плотность теплового потока на поверхности цилиндра равна:

$$q_w = \frac{Q_w}{F} = \frac{q_v \pi R^2 \ell}{2\pi R \ell} = \frac{q_v R}{2}. \quad (6.38)$$

### **§ 6.4. Теплопроводность шара с внутренними источниками теплоты**

Температурное поле при охлаждении шара с внутренними источниками теплоты при граничных условиях III рода изображено на рис. 6.3. При условиях однозначности, заданных в § 6.1, найдем закон изменения температуры и теплового потока вдоль радиуса –  $T(r)$  и  $Q(r)$ , поверхностную плотность теплового потока  $q_w$ , уходящего с поверхности шара, температуру в центре  $T_c$  и на поверхности  $T_w$  шара и максимальный перепад температур по сечению шара  $\Delta T = T_c - T_w$ .

Запишем кратко условие поставленной задачи:

Дано:  $k = 3$ ;  $R = r_{III}$ ;  $\lambda$ ;  $q_v$ ;  $\alpha$ ;  $T_f$ ;

Найти:  $T(r)$ ;  $T_c$ ;  $T_w$ ;  $\Delta T$ ;  $Q(r)$ ;  $Q_w$ ;  $q_w$ ,

где  $r_{III}$  – радиус шара;  $T_c$  и  $T_w$  – температура теплового центра и поверхности шара;  $\Delta T$  – перепад температур по сечению шара.

Напишем дифференциальное уравнение теплопроводности и граничные условия при охлаждении шара, в котором действуют равномерно распределенные источники теплоты мощностью  $q_v$ . Дифференциальное уравнение теплопроводности для бесконечного цилиндра получим, подставляя коэффициент формы  $k = 3$  и заменяя координату  $x_1 = r$

в дифференциальном уравнении (5.36), записанном в дивергентной форме, и в дифференциальном уравнении (5.37):

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \frac{q_v}{\lambda} = 0; \quad (6.39)$$

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (6.40)$$

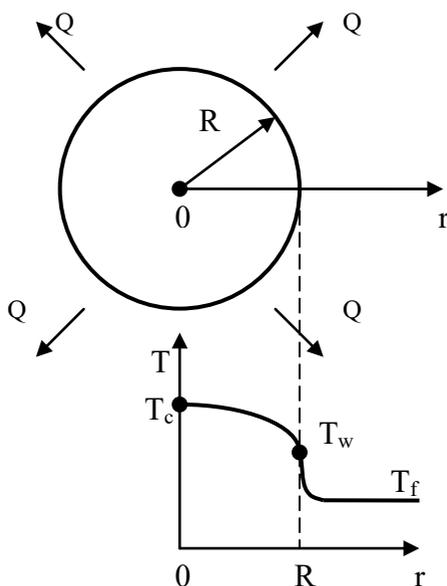


Рис. 6.3. Температурное поле в шаре при действии равномерно распределенных внутренних источников теплоты

Граничное условие на внутренней границе расчетной области для шара ( $r=0$ ), граничное условие I рода и граничное условие III рода на внешней границе расчетной области шара ( $r=R$ ) по форме записи совпадают с

граничными условиями для бесконечного цилиндра (6.21), (6.1) и (6.22).

Линейную краевую задачу теории теплопроводности (6.39), (6.21) и (6.22) решим аналитическим методом разделения переменных. Разделяем переменные и интегрируем дифференциальное уравнение (6.39) первый раз, предварительно умножив оба слагаемых уравнения на текущий радиус в квадрате  $r^2$ :

$$\int \left[ \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) \right] dr + \int \frac{q_v r^2}{\lambda} dr = 0 ;$$

$$r^2 \frac{dT}{dr} + \frac{q_v r^3}{3\lambda} = C_1. \quad (6.41)$$

Делим на  $r^2$  все члены последнего дифференциального уравнения:

$$\frac{dT}{dr} + \frac{q_v r}{3\lambda} = \frac{C_1}{r^2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{q_v r}{3\lambda} + \frac{C_1}{r^2}. \quad (6.42)$$

Разделяем переменные и, интегрируя второй раз, находим общий интеграл дифференциального уравнения теплопроводности (6.39):

$$\int dT = -\int \frac{q_v r}{3\lambda} dr + \int \frac{C_1}{r^2} dr ;$$

$$T(r) = -\frac{q_v r^2}{6\lambda} - \frac{C_1}{r} + C_2. \quad (6.43)$$

Найдем постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  в формуле (6.43). Подставляя граничное условие (6.21) в центре шара ( $r = 0$ ) в (6.41), получим  $C_1 = 0$ . Тогда общее решение (6.43) примет вид:

$$T(r) = -\frac{q_v r^2}{6\lambda} + C_2. \quad (6.44)$$

Из последнего выражения, записанного для поверхности цилиндра ( $r = R$ ) с учетом обозначения  $T(R) = T_w$ , имеем:

$$C_2 = T_w + \frac{q_v R^2}{6\lambda}. \quad (6.45)$$

Подставляя  $C_2$  в общий интеграл (6.44), получаем решение дифференциального уравнения теплопроводности (6.39) при граничных условиях I рода:

$$\begin{aligned} T(r) &= -\frac{q_v r^2}{6\lambda} + T_w + \frac{q_v R^2}{6\lambda} = T_w + \frac{q_v}{6\lambda} (R^2 - r^2) = \\ &= T_w + \frac{q_v R^2}{6\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Температуру поверхности шара  $T_w$ , входящую в уравнение (6.46), выразим через температуру флюида  $T_f$  и коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ , используя граничные условия III рода на внешней поверхности шара (6.22):

$$T_w = T_f - \frac{\lambda}{\alpha} \frac{dT}{dr} \Big|_{r=R}. \quad (6.47)$$

Значение производной температуры на поверхности шара ( $r = R$ ) найдем из выражения (6.42) с учетом  $C_1 = 0$ :

$$\frac{dT}{dr} \Big|_{r=R} = -\frac{q_v R}{3\lambda}. \quad (6.48)$$

Подставляя (6.48) в (6.47), находим температуру на поверхности шара:

$$T_w = T_f - \frac{\lambda}{\alpha} \left( -\frac{q_v R}{3\lambda} \right) = T_f + \frac{q_v R}{3\alpha}. \quad (6.49)$$

Подставляя выражение (6.49) в формулу (6.46), получим решение дифференциального уравнения теплопроводности (6.39) при граничных условиях III рода:

$$\begin{aligned} T(r) &= T_f + \frac{q_v R}{3\alpha} + \frac{q_v R^2}{6\lambda} - \frac{q_v r^2}{6\lambda} = \\ &= T_f + \frac{q_v R}{3\alpha} + \frac{q_v}{6\lambda} (R^2 - r^2) = \\ &= T_f + \frac{q_v R}{3\alpha} + \frac{q_v R^2}{6\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Анализ температурного поля шара  $T(r)$  при граничных условиях I рода (6.46) и при граничных условиях III рода (6.50) показывает, что температура по сечению шара изменяется по закону параболы. Температуру в тепловом центре  $T_c$  шара рассчитывают по формуле, получаемой из выражения (6.50) при  $r = 0$ :

$$T_c = T_f + \frac{q_v R}{3\alpha} + \frac{q_v R^2}{6\lambda}. \quad (6.51)$$

Перепад температур по сечению шара равен:

$$\Delta T = T_c - T_w = \frac{q_v R^2}{6\lambda}. \quad (6.52)$$

Зная температурное поле шара, найдем тепловой поток, используя закон Фурье (5.2) и уравнение температурного поля (6.50):

$$\begin{aligned}
 Q(r) &= -\lambda \frac{dT}{dr} \cdot F(r) = -\lambda \left[ -\frac{q_v r}{3\lambda} \right] \cdot 4\pi r^2 = \\
 &= q_v \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = q_v \cdot V(r),
 \end{aligned}
 \tag{6.53}$$

где  $\text{grad}(T) = \frac{dT}{dr}$  – градиент температурного поля в шаре;

$F(r) = 4\pi r^2$  – площадь боковой поверхности шара радиусом  $r$ , м<sup>2</sup>;  $V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3$  – объем шара радиусом  $r$ , м<sup>3</sup>.

Тепловой поток, уходящий с поверхности шара радиусом  $R$  равен:

$$Q_w = q_v \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = q_v \cdot V,
 \tag{6.54}$$

где  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$  – объем шара, м<sup>3</sup>;  $R$  – радиус шара, м.

Плотность теплового потока, уходящего с поверхности шара равна:

$$q_w = \frac{Q_w}{F} = \frac{4}{3} \frac{q_v \pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{q_v R}{3},
 \tag{6.55}$$

где  $F = 4\pi R^2$  – площадь поверхности шара.

### § 6.5. Общее решение задачи стационарной теплопроводности для тел простой формы с внутренними источниками теплоты

Анализируя формулы для расчета температурного поля в бесконечной пластине (6.13), в бесконечном цилиндре (6.32) и шаре (6.50) можно записать единую формулу для расчета распределения температуры в этих телах:

$$\begin{aligned}
T(x_1) &= T_f + \frac{q_v R}{k\alpha} + \frac{q_v R^2}{2k\lambda} - \frac{q_v r^2}{2k\lambda} = \\
&= T_f + \frac{q_v R}{k\alpha} + \frac{q_v}{2k\lambda} (R^2 - r^2) = \\
&= T_f + \frac{q_v R}{k\alpha} + \frac{q_v R^2}{2k\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right],
\end{aligned} \tag{6.56}$$

где  $x_1$  – первая координата в ортогональной системе координат (см. § 1.1.), которая имеет смысл  $x_1 = x$  для декартовой системы координат и  $x_1 = r$  для цилиндрической и сферической систем координат;  $k$  – коэффициент формы тела:  $k=1$  – бесконечная пластина;  $k=2$  – бесконечный цилиндр;  $k=3$  – шар.

Температуру на поверхности  $T_w$  и в тепловом центре  $T_c$  тел простой формы можно рассчитать по единым формулам в зависимости от коэффициента формы тела  $k$ :

$$T_w = T_f + \frac{q_v R}{k\alpha}; \tag{6.57}$$

$$T_c = T_f + \frac{q_v R}{k\alpha} + \frac{q_v R^2}{2k\lambda}. \tag{6.58}$$

Перепад температур по сечению тела простой формы равен:

$$\Delta T = T_c - T_w = \frac{q_v R^2}{2k\lambda}. \tag{6.59}$$

Тепловой поток, уходящий с поверхности тела, рассчитывают по очевидной формуле:

$$Q_w = q_v V, \tag{6.60}$$

где  $q_v$  – мощность внутренних источников теплоты равномерно распределенных по объему тела, Вт/м<sup>3</sup>;  $V$  – объем тела, м<sup>3</sup>.

Поверхностная плотность теплового потока, уходящего с поверхности тела простой формы, равна:

$$q_w = \frac{Q_w}{F} = \frac{q_v R}{k} = q_v R_v, \quad (6.61)$$

где  $R_v = R/k$  – обобщенный размер тела простой формы, м;  $k$  – коэффициент формы тела.

### § 6.6. Теплопроводность неограниченной цилиндрической стенки с внутренними источниками теплоты

Дифференциальное уравнение теплопроводности для бесконечного цилиндра и бесконечной цилиндрической стенки, в которой действуют равномерно распределенные источники теплоты мощностью  $q_v$ , имеет дивергентный вид (6.19) и вид (6.20) в обычной форме записи:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{q_v}{\lambda} = 0;$$

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0.$$

В условиях однозначности должны быть заданы геометрические размеры неограниченной стенки – внутренний радиус  $r_1$  и наружный радиус  $r_2$  и физические свойства материала стенки, которые характеризует коэффициент теплопроводности  $\lambda$ . Величина мощности внутренних тепловыделений  $q_v$  тоже должна быть известна.

Вид граничных условий зависит от способа охлаждения стенки. Рассмотрим три случая условий теплообмена цилиндрической стенки с окружающей текучей средой:

– отвод теплоты происходит только от внутренней стороны цилиндрической стеки в внутреннюю текучую среду с температурой  $T_{f1}$  и коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_1$ , а с внешней стороны стенки теплообмен отсутствует;

– отвод теплоты происходит только от внешней стороны цилиндрической стеки в окружающую текучую среду с температурой  $T_{f2}$  и коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_2$ , а с внутренней стороны стенки теплообмен отсутствует;

– отвод теплоты происходит от внутренней стороны цилиндрической стеки во внутреннюю текучую среду с температурой  $T_{f1}$  и коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_1$ , а от внешней стороны стенки также существует отвод теплоты в окружающую текучую среду с температурой  $T_{f2}$  и коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_2$ .

### **§ 6.6.1. Отвод теплоты только через внутреннюю поверхность цилиндрической стенки**

Температурное поле при охлаждении цилиндрической стенки с внутренними источниками теплоты при граничных условиях III рода только с *внутренней* стороны изображено на рис. 6.4.

Рассчитаем температурное поле в цилиндрической стенке  $T(r)$ , температуру на внутренней  $T_{w1}$  и на наружной  $T_{w2}$  поверхностях стенки, перепад температур по сечению стенки  $\Delta T = T_{w2} - T_{w1}$  и плотность теплового потока  $q_{w1}$  к среде с температурой  $T_{f1}$ , движущейся внутри цилиндрической стенки при заданном коэффициенте теплоотдачи  $\alpha_1$ .

По условию задачи теплообмен от внешней поверхности цилиндрической стенки отсутствует, поэтому  $q_{w2} = 0$ .

Запишем кратко условие поставленной задачи:

Дано:  $r_1$ ;  $r_2$ ;  $\lambda$ ;  $\alpha_1$ ;  $T_{f1}$ ;  $q_v$ .

Найти:  $T(r)$ ;  $T_{w1}$ ;  $T_{w2}$ ;  $\Delta T$ ;  $q_{w1}$ .

Граничное условие на внутренней поверхности цилиндрической стенки ( $r = r_1$ ) от которой отводится теплота теплоносителю с температурой  $T_{f1}$  и коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_1$ :

$$-\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_1} = \alpha_1 (T_{f1} - T_{w1})$$

или

$$\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_1} = \alpha_1 (T_{w1} - T_{f1}). \quad (6.62)$$

Теплообмен внешней поверхности стенки с окружающей средой отсутствует, поэтому при  $r = r_2$  запишем условие адиабаты:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_2} = 0. \quad (6.63)$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности для бесконечного цилиндра и бесконечной цилиндрической стенки (6.19) решено выше в разделе § 6.3 методом разделения переменных и имеет вид (6.25):

$$T(r) = -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования, которые находят, используя граничные условия (6.62) и (6.63).

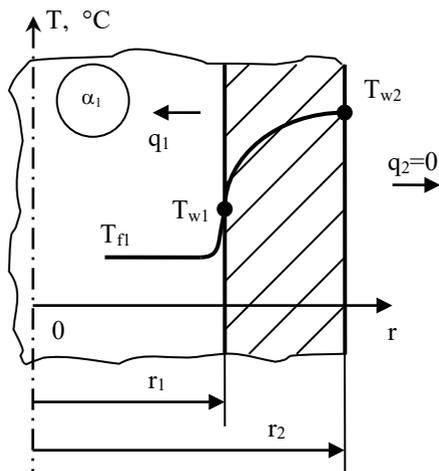


Рис. 6.4. Температурное поле в цилиндрической стенке при действии внутренних источников теплоты и отводе теплоты только через внутреннюю поверхность

Алгоритм определения постоянных интегрирования подробно изложен в разделе § 6.3 при рассмотрении теплообмена бесконечного цилиндра с окружающей средой. Рассчитав постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  и подставив в общее решение (6.25), получим формулу для расчета температурного поля в цилиндрической стенке при действии внутренних источников теплоты и отводе теплоты только через внутреннюю поверхность:

$$T(r) = T_{f1} + \frac{q_v r_1}{2\alpha_1} \left[ \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right] + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 2 \ln \frac{r}{r_1} + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - \left( \frac{r}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (6.64)$$

Подставляя в формулу (6.64) значение радиуса  $r = r_1$ , получим выражение для расчета температуры на внутренней теплоотдающей поверхности цилиндрической стенки:

$$T_{w1} = T_{f1} + \frac{q_v r_1}{2\alpha_1} \left[ \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right]. \quad (6.65)$$

Температуру на внешней адиабатной поверхности цилиндрической стенки  $T_{w2}$  рассчитывают по формуле, полученной из выражения (6.64) при  $r = r_2$ :

$$T_{w2} = T_{f1} + \frac{q_v r_1}{2\alpha_1} \left[ \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right] + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 2 \ln \frac{r_2}{r_1} + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - 1 \right]. \quad (6.66)$$

Перепад температуры по сечению цилиндрической стенки равен:

$$T_{w2} - T_{w1} = \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 2 \ln \frac{r_2}{r_1} + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - 1 \right]. \quad (6.67)$$

Плотность теплового потока на внутренней поверхности цилиндрической стенки находим по закону теплоотдачи:

$$\begin{aligned}
 q_{w1} &= \alpha_1(T_{f1} - T_{w1}) = \\
 &= \alpha_1 \left\{ T_{f1} - T_{f1} - \frac{q_v r_1}{2\alpha_1} \left[ \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right] \right\} = \frac{q_v r_1}{2} \left[ \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right]. \quad (6.68)
 \end{aligned}$$

Заметим, что при отводе теплоты внутрь цилиндрической стенки  $q_{w1} = \alpha_1(T_{f1} - T_{w1}) < 0$ , потому что  $T_{f1} < T_{w1}$ . Этот результат показывает, что тепловой поток, уходящий с внутренней поверхности цилиндрической стенки, направлен против оси  $Oz$ .

Если на внутренней поверхности цилиндрической стенки задана температура  $T_{w1}$  (граничные условия I рода), то в этом случае  $\alpha_1 \rightarrow \infty$  и  $T_{f1} \rightarrow T_{w1}$ , поэтому формула (6.64) для расчета температурного поля цилиндрической стенки принимает вид:

$$T(r) = T_{w1} + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 2 \ln \frac{r}{r_1} + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - \left( \frac{r}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (6.69)$$

Подставляя в формулу (6.69) значение  $r = r_2$ , получим выражение для расчета температуры на внешней поверхности цилиндрической стенки  $T_{w2}$  при граничных условиях первого рода:

$$T_{w2} = T_{w1} + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 2 \ln \frac{r_2}{r_1} + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - 1 \right]. \quad (6.70)$$

### § 6.6.2. Отвод теплоты только через наружную поверхность цилиндрической стенки

Температурное поле при охлаждении цилиндрической стенки с внутренними источниками теплоты при граничных

условиях III рода только с наружной стороны изображено на рис. 6.5.

Рассчитаем температурное поле в цилиндрической стенке  $T(r)$ , температуру на внутренней  $T_{w1}$  и на наружной  $T_{w2}$  поверхностях стенки, перепад температур по сечению стенки  $\Delta T = T_{w1} - T_{w2}$  и плотность теплового потока  $q_{w2}$  к среде с температурой  $T_{f2}$ , омывающей цилиндрическую стенку снаружи при заданном коэффициенте теплоотдачи  $\alpha_2$ . По условию задачи теплообмен от внутренней поверхности цилиндрической стенки отсутствует, поэтому  $q_{w1} = 0$ .

Запишем кратко условие поставленной задачи:

Дано:  $r_1$ ;  $r_2$ ;  $\lambda$ ;  $\alpha_2$ ;  $T_{f2}$ ;  $q_v$ .

Найти:  $T(r)$ ;  $T_{w1}$ ;  $T_{w2}$ ;  $\Delta T$ ;  $q_{w2}$ .

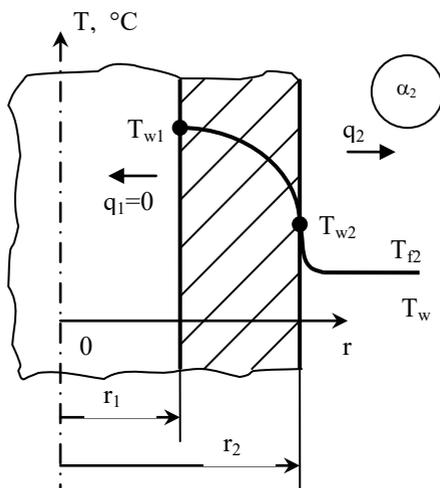


Рис. 6.5. Температурное поле в цилиндрической стенке при действии внутренних источников теплоты и отводе теплоты только через наружную поверхность

Теплообмен внутренней поверхности стенки с текучей средой, которая движется внутри стенки, отсутствует, поэтому при  $r = r_1$  запишем условие адиабаты:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_1} = 0. \quad (6.71)$$

Граничное условие на внешней поверхности цилиндрической стенки ( $r = r_2$ ) от которой отводится теплота теплоносителем с температурой  $T_{f2}$  и коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_2$ :

$$-\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_2} = \alpha_2 (T_{w2} - T_{f2}). \quad (6.72)$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности для бесконечного цилиндра и бесконечной цилиндрической стенки (6.19) решено выше в разделе § 6.3 методом разделения переменных и имеет вид (6.25):

$$T(r) = -\frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования, которые находят, используя граничные условия (6.62) и (6.63).

Алгоритм определения постоянных интегрирования подробно изложен в разделе § 6.3 при рассмотрении теплообмена бесконечного цилиндра с окружающей средой. Рассчитав постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  и подставив в общее решение (6.25), получим формулу для расчета температурного поля в цилиндрической стенке при действии внутренних источников теплоты и отводе теплоты только через наружную поверхность:

$$T(r) = T_{f2} + \frac{q_v r_2}{2\alpha_2} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 1 + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 2 \ln \frac{r}{r_2} - \left( \frac{r}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (6.73)$$

Заметим, что в частном случае, если в формулу (6.73) подставить значения  $r_1 = 0$  и  $r_2 = R$  и заменить обозначение температуры  $T_{f2} = T_f$  и коэффициента теплоотдачи  $\alpha_2 = \alpha$ , то получим формулу (6.32) для расчета температурного поля в неограниченном цилиндре.

Температуру на внутренней адиабатной поверхности цилиндрической стенки  $T_{w1}$  рассчитывают, подставляя  $r = r_1$  в формулу (6.73):

$$T_{w1} = T_{f2} + \frac{q_v r_2}{2\alpha_2} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 1 + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 2 \ln \frac{r_1}{r_2} - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (6.74)$$

Температуру на внешней теплоотдающей поверхности цилиндрической стенки  $T_{w2}$  рассчитывают, подставляя  $r = r_2$  в формулу (6.73):

$$T_{w2} = T_{f2} + \frac{q_v r_2}{2\alpha_2} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (6.75)$$

Перепад температур по сечению цилиндрической стенки равен:

$$\begin{aligned}
T_{w1} - T_{w2} &= \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 1 + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 2 \ln \frac{r_1}{r_2} - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] = \\
&= \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \left[ \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 + 2 \ln \frac{r_1}{r_2} - 1 \right] = \\
&= \frac{q_v r_1^2}{4\lambda} \left[ \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 + 2 \ln \frac{r_1}{r_2} - 1 \right].
\end{aligned} \tag{6.76}$$

Плотность теплового потока, отводимого от внешней поверхности цилиндрической стенки к теплоносителю с температурой  $T_{f2}$  с интенсивностью теплоотдачи  $\alpha_2$ , рассчитаем по закону теплоотдачи Ньютона:

$$\begin{aligned}
q_{w2} &= \alpha_2 (T_{w2} - T_{f2}) = \\
&= \alpha_2 \left\{ T_{f2} + \frac{q_v r_2}{2\alpha} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] - T_{f2} \right\} = \\
&= \frac{q_v r_2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right].
\end{aligned} \tag{6.77}$$

В частном случае для сплошного неограниченного цилиндра ( $r_1 = 0$ ) формула для расчета плотности теплового потока на внешней поверхности цилиндрической стенки совпадает с формулой (6.38) (см. § 6.3):

$$q_{w2} = \frac{q_v r_2}{2},$$

где  $r_2 = R$  – радиус сплошного цилиндра.

Если на внешней поверхности цилиндрической стенки задана температура  $T_{w2}$  (граничные условия I рода), то в этом случае  $\alpha_2 \rightarrow \infty$  и  $T_{f2} \rightarrow T_{w2}$  и формула (6.73) для расчета температурного поля цилиндрической стенки принимает вид:

$$T(r) = T_{w2} + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 1 + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 2 \ln \frac{r}{r_2} - \left( \frac{r}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (6.78)$$

Подставляя в формулу (6.78)  $r = r_1$ , получим выражение для расчета температуры на внутренней поверхности  $T_{w1}$  цилиндрической стенки при отводе теплоты только снаружи, если на внешней поверхности задана температура  $T_{w2}$ :

$$T_{w1} = T_{w2} + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 1 + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 2 \ln \frac{r_1}{r_2} - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (6.79)$$

### § 6.6.3. Отвод теплоты через внутреннюю и наружную поверхности цилиндрической стенки

Температурное поле при охлаждении цилиндрической стенки с внутренними источниками теплоты с обеих сторон стенки при граничных условиях III рода изображено на рис. 6.6. От внутренней поверхности цилиндрической стенки тепловой поток уходит к теплоносителю с температурой  $T_{f1}$  с интенсивностью теплоотдачи  $\alpha_1$ , а от внешней стороны тепловой поток забирает теплоноситель с температурой  $T_{f2}$  и с коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_2$ .

Рассчитаем температурное поле  $T(r)$ , температуру внутренней поверхности стенки  $T_{w1}$ , температуру

наружной поверхности стенки  $T_{w2}$  и температуру теплового центра  $T_c$  – адиабатной цилиндрической поверхности с радиусом  $r_c$ , на поверхности которой выполняется условие  $dT/dr = 0$ . Найдем также плотность теплового потока  $q_{w1}$ , уходящего от внутренней поверхности цилиндрической стенки, и плотность теплового потока  $q_{w2}$ , уходящего от наружной поверхности цилиндрической стенки.

Запишем кратко условие поставленной задачи.

Дано:  $r_1$ ;  $r_2$ ;  $\lambda$ ;  $\alpha_1$ ;  $\alpha_2$ ;  $T_{f1}$ ;  $T_{f2}$ ;  $q_v$ .

Найти:  $r_c$ ;  $T(r)$ ;  $T_{w1}$ ;  $T_{w2}$ ;  $q_{w1}$ ;  $q_{w2}$ .

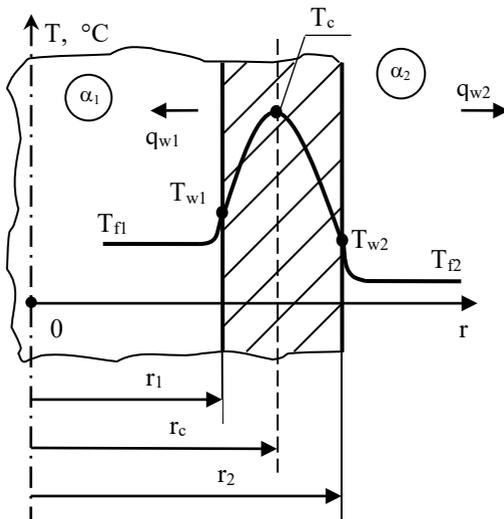


Рис. 6.6. Температурное поле в цилиндрической стенке при действии внутренних источников теплоты и отводе теплоты с обеих сторон стенки

На внутренней поверхности цилиндрической стенки при  $r = r_1$  задано граничное условие III рода (6.62):

$$\lambda \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_1} = \alpha_1 (T_{w1} - T_{f1}),$$

а на внешней поверхности стенки при  $r = r_2$  – граничное условие III рода (6.72):

$$-\lambda \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_2} = \alpha_2 (T_{w2} - T_{f2}).$$

Изотермическая поверхность  $T_c = \text{const}$  разделяет цилиндрическую стенку на два слоя. Во внутреннем слое теплота передается к текучей среде, протекающей внутри полого цилиндра, а во внешнем – к теплоносителю, омывающему цилиндрическую стенку снаружи. Поэтому, если определить радиус теплового центра  $r_c$ , то температурное поле во *внутреннем* слое стенки в области  $r_1 \leq r < r_c$  можно рассчитать по формуле (6.64), приняв радиус  $r_2 = r_c$ , а *внешнем* слое стенки в области  $r_c < r \leq r_2$  – по формуле (6.73), задавая радиус  $r_1 = r_c$ . Получим:

– во внутреннем слое стенки  $r_1 \leq r < r_c$  при  $r_2 = r_c$

$$T(r) = T_{f1} + \frac{q_v r_1}{2\alpha_1} \left[ \left( \frac{r_c}{r_1} \right)^2 - 1 \right] + \frac{q_v r_c^2}{4\lambda} \left[ 2 \ln \frac{r}{r_1} + \left( \frac{r_1}{r_c} \right)^2 - \left( \frac{r}{r_c} \right)^2 \right]; \quad (6.80)$$

– во внешнем слое стенки  $r_c < r \leq r_2$  при  $r_1 = r_c$

$$T(r) = T_{f2} + \frac{q_v r_2}{2\alpha_2} \left[ 1 - \left( \frac{r_c}{r_2} \right)^2 \right] + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 1 + \left( \frac{r_c}{r_2} \right)^2 2 \ln \frac{r}{r_2} - \left( \frac{r}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (6.81)$$

### ***Расчет радиуса адиабатной поверхности***

Для вывода формулы для расчета радиуса адиабатной поверхности  $r_c$  запишем максимальные перепады температур во внешнем и внутреннем слоях цилиндрической стенки.

Выражение для расчета максимального перепада температуры во *внутреннем* слое цилиндрической стенки получим из формулы (6.67), заменив температуру наружной поверхности  $T_{w2}$  на температуру теплового центра  $T_c$  и наружный радиус  $r_2$  – на радиус теплового центра  $r_c$ :

$$T_c - T_{w1} = \frac{q_v r_c^2}{4\lambda} \left[ 2 \ln \frac{r_c}{r_1} + \left( \frac{r_1}{r_c} \right)^2 - 1 \right]. \quad (6.82)$$

Выражение для расчета максимального перепада температуры во *внешнем* слое получим из формулы (6.76), заменив температуру внутренней поверхности  $T_{w1}$  на температуру теплового центра  $T_c$  и внутренний радиус  $r_1$  на радиус теплового центра  $r_c$ :

$$T_c - T_{w2} = \frac{q_v r_c^2}{4\lambda} \left[ \left( \frac{r_2}{r_c} \right)^2 + 2 \ln \frac{r_c}{r_2} - 1 \right]. \quad (6.83)$$

Вычитая из левой и правой частей уравнения (6.83) левую и правую части уравнения (6.82), получим:

$$\begin{aligned} T_{w1} - T_{w2} &= \frac{q_v r_c^2}{4\lambda} \left[ \left( \frac{r_2}{r_c} \right)^2 - \left( \frac{r_1}{r_c} \right)^2 + 2 \ln \frac{r_c}{r_2} - 2 \ln \frac{r_c}{r_1} \right] = \\ &= \frac{q_v r_c^2}{4\lambda} \left[ \left( \frac{r_2}{r_c} \right)^2 - \left( \frac{r_1}{r_c} \right)^2 + 2 \ln \frac{r_1}{r_2} \right] = \frac{q_v}{4\lambda} \left[ r_2^2 - r_1^2 + 2r_c^2 \ln \frac{r_1}{r_2} \right] \end{aligned}$$

или

$$\frac{4\lambda(T_{w1} - T_{w2})}{q_v} - (r_2^2 - r_1^2) = 2r_c^2 \ln \frac{r_1}{r_2},$$

откуда следует

$$r_c^2 = \frac{4\lambda(T_{w1} - T_{w2})}{2q_v \ln \frac{r_1}{r_2}} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{2 \ln \frac{r_1}{r_2}}.$$

Приводя последнее выражение к общему знаменателю с учетом равенства  $\ln \frac{r_1}{r_2} = -\ln \frac{r_2}{r_1}$ , окончательно получим:

$$r_c^2 = \frac{q_v (r_2^2 - r_1^2) - 4\lambda(T_{w1} - T_{w2})}{2q_v \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (6.84)$$

Неизвестные температуры на внутренней  $T_{w1}$  и на наружной  $T_{w2}$  поверхностях цилиндрической стенки находят из уравнений теплового баланса, записанных для внутренней и внешней областей цилиндрической стенки, считая от адиабатной поверхности:

$$\left. \begin{aligned} Q_{w1} &= q_v V_1 = \alpha_1 (T_{w1} - T_{f1}) F_1 \\ Q_{w2} &= q_v V_2 = \alpha_2 (T_{w2} - T_{f2}) F_2 \end{aligned} \right\}, \quad (6.85)$$

где  $V_1 = \pi(r_c^2 - r_1^2) \cdot \ell$ , м<sup>3</sup>;  $V_2 = \pi(r_2^2 - r_c^2) \cdot \ell$ , м<sup>3</sup>;  $F_1 = 2\pi r_1 \cdot \ell$ , м<sup>2</sup>;  $F_2 = 2\pi r_2 \cdot \ell$ , м<sup>2</sup>;  $\ell$  – длина (высота) цилиндрической стенки, м.

Подставляя объемы  $V_1$  и  $V_2$ , площади  $F_1$  и  $F_2$  в систему уравнений (6.85), получим:

$$\left. \begin{aligned} q_v \pi (r_c^2 - r_1^2) \cdot \ell &= \alpha_1 (T_{w1} - T_{f1}) 2\pi r_1 \cdot \ell \\ q_v \pi (r_2^2 - r_c^2) \cdot \ell &= \alpha_2 (T_{w2} - T_{f2}) 2\pi r_2 \cdot \ell \end{aligned} \right\} \quad (6.86)$$

Выразим из системы уравнений (6.86) температуры на внутренней  $T_{w1}$  и на наружной  $T_{w2}$  поверхностях цилиндрической стенки и объединим полученные формулы с уравнением для расчета радиуса теплового центра (6.84) в единую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} T_{w1} &= T_{f1} + \frac{q_v (r_c^2 - r_1^2)}{2r_1 \alpha_1} \\ T_{w2} &= T_{f2} + \frac{q_v (r_2^2 - r_c^2)}{2r_2 \alpha_2} \\ r_c^2 &= \frac{q_v (r_2^2 - r_1^2) - 4\lambda (T_{w1} - T_{w2})}{2q_v \ln \frac{r_2}{r_1}} \end{aligned} \right\}. \quad (6.87)$$

Решая систему алгебраических уравнений (6.87) методом последовательных приближений (методом итераций), находим радиус теплового центра  $r_c$  и температуры на

внутренней  $T_{w1}$  и наружной  $T_{w2}$  поверхностях цилиндрической стенки.

В качестве нулевого приближения для расчета радиуса теплового центра можно использовать формулу:

$$r_c^2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}}, \quad (6.88)$$

которая справедлива в частном случае равенства температур на внутренней и наружной поверхностях цилиндрической стенки  $T_{w1} = T_{w2}$ . При этом условии радиус теплового центра не зависит от условий внешнего теплообмена (от величины коэффициентов теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ) на внутренней и внешней границах цилиндрической стенки.

### § 6.7. Температурное поле в стержневом тепловыделяющем элементе (ТВэле)

В ядерном реакторе тепловыделяющий цилиндрический стержень, изготовленный из ядерного топлива, экранируют специальной оболочкой, выполненной, как правило, из сплава циркония с ниобием. Между тепловыделяющим стержнем и внутренней поверхностью оболочки предусмотрен зазор (контактный слой), который заполняют гелием. Зазор служит для релаксации (снятия) термических напряжений в топливном стержне для предотвращения его разрушения. Устройство, состоящее из топливных таблеток, оформленных в виде тепловыделяющего цилиндрического стержня и окружающей его оболочки, называют *тепловыделяющим элементом* (ТВэлеом) активной зоны ядерного реактора. Изучение всех особенностей теплогидравлического расчета в реакторах разной конструкции не входит в задачу данного учебника по тепломассообмену,

поэтому рассмотрим температурное поле твэла только для условий активной зоны водо-водяного ядерного реактора ВВЭР-1000 как наиболее распространенного в настоящее время в России [42]. Активная зона ядерного реактора ВВЭР-1000 характеризуется следующими конструктивными и режимными параметрами[42] :  $\Delta T = T$

– диаметр активной зоны реактора  $d_{аз} = 3,12$  м;

– высота активной зоны реактора  $H_{аз} = 3,55$  м;

– твэлы сгруппированы в вертикальные пучки, которые получили название тепловыделяющих сборок (ТВС). В активной зоне реактора находится 163 ТВС, в которой расположено 312 твэлов;

– в пучке твэлы расположены в вершинах правильного треугольника с шагом  $S/d = 1,38$ , где  $S$  – расстояние между центрами твэлов, а  $d = d_{об}$  – наружный диаметр твэла (оболочки);

– геометрические размеры твэла в поперечном сечении (см. рис. 6.7):

♦ диаметр и высота топливной таблетки  $d_T = (7,55 \div 7,6) \cdot 10^{-3}$  м;  $h_T = 20 \cdot 10^{-3}$  м;

♦ толщина контактного слоя  $\delta_{кc} = (0,1 \div 0,12) \cdot 10^{-3}$  м;

♦ внутренний диаметр оболочки  $d_{вн.об} = d_{кc} = d_T + 2\delta_{кc} = 3,8 \cdot 10^{-3}$  м;

♦ толщина оболочки  $\delta_{об} = 0,65 \cdot 10^{-3}$  м;

♦ наружный диаметр твэла (наружный диаметр оболочки)  $d = d_{об} = 9,1 \cdot 10^{-3}$  м;

– топливо – таблетки двуокиси урана  $UO_2$ ;

– материал оболочки – сплав циркония с ниобием;

– общая загрузка топлива – 75 тонн;

– средняя по сечению канала скорость теплоносителя  $\bar{w} = 5,6$  м/с;

– коэффициент теплоотдачи в зависимости от скорости течения теплоносителя и расположения твэла в ТВС лежит в пределах  $\bar{\alpha} = (20 \div 40) \cdot 10^3$  Вт/(м<sup>2</sup>·К);

– средняя удельная мощность активной зоны реактора  $\bar{q}_v = 100 \div 120$  МВт/м<sup>3</sup>;

– теплоноситель (не кипящая вода) в реакторе повышает свою температуру от  $T_{f,вх} \cong 290^0\text{C}$  до  $T_{f,вых} \cong 330^0\text{C}$ ;

– при использовании современных ТВС топливная кампания – время работы реактора с одной загрузкой, составляет 4,5 года с перезагрузкой каждые 1,5 года или 5 лет с перезагрузкой один раз год;

– средний перепад температур между оболочкой твэла и теплоносителем  $\overline{\Delta T_\alpha} = 30 \div 40^0\text{C}$ ;

– максимальная температура топлива  $T_T^{\max} = 1600^0\text{C}$ ;

– максимальная температура оболочки  $T_{об}^{\max} = 350^0\text{C}$ ;

– давление теплоносителя  $p = 16$  МПа.

Принципиальная схема твэла показана на рис. 6.7. В общем случае температурное поле в цилиндрическом твэле является *трехмерным* и *нестационарным*  $T(r, \varphi, z, \tau)$ , где  $r, \varphi, z$  – координаты в цилиндрической системе координат, а  $\tau$  – время. Изменение температурного поля твэла по радиальной и продольной координатам  $T = f(r, z)$  обусловлено характером зависимости тепловыделения вдоль радиуса и по высоте твэла  $q_v(r, z)$ , вид которой приведен в специальной литературе [42]. На изменение температурного поля твэла по его высоте  $T = f(z)$  влияет также и теплообмен оболочки твэла с омывающим ее теплоносителем.

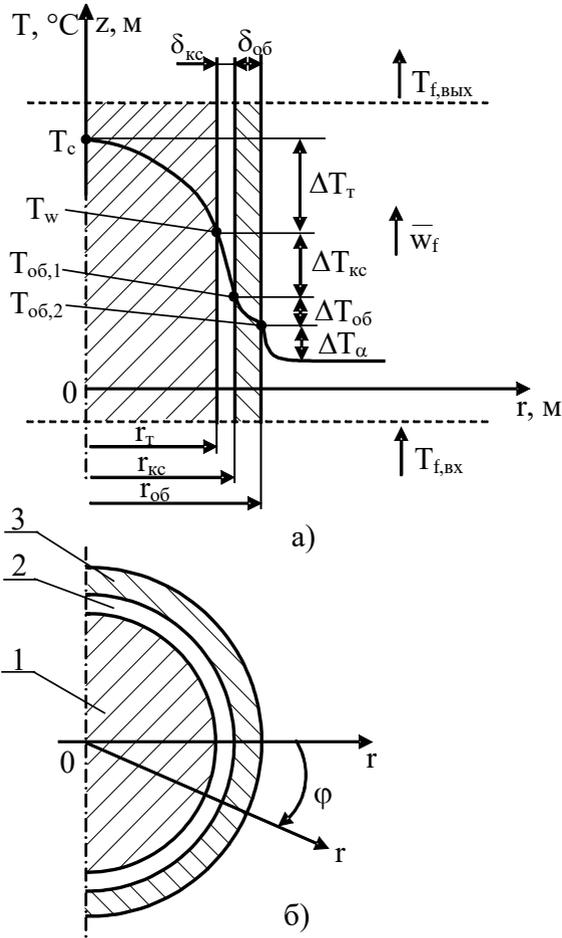


Рис. 6.7. Схема топливного выделяющего элемента:  
 а) продольный разрез; б) поперечный разрез  
 1 – топливный стержень; 2 – контактный слой; 3 – оболочка

Неравномерность температурного поля по угловой координате  $\phi$  объясняется теплообменом данного твэла с соседними твэлами в пучке ТВС.

В процессе выгорания топлива мощность тепловыделения уменьшается, поэтому  $q_v = f(\tau)$  и, соответственно, температура твэла и теплоносителя тоже зависят от времени  $T = f(\tau)$ . Однако процесс выгорания происходит медленно (не менее года), поэтому температурное поле твэла можно считать квазистационарным (медленно изменяющимся во времени). Нестационарность теплообмена вследствие изменения мощности тепловыделения во времени учитывают, выполняя расчет температурного поля активной зоны реактора для начала, середины и конца топливной кампании.

В инженерных расчетах принимают допущение о постоянстве мощности внутреннего тепловыделения  $q_v = \text{const}$ , рассматривают одиночный твэл без взаимодействия с соседними твэлами в тепловыделяющей сборке (ТВС) и температурное поле рассчитывают для заданного по высоте ( $z = \text{const}$ ) сечения твэла с известной температурой теплоносителя в этом сечении  $T_f = \text{const}$ . В этом случае задача расчета температурного поля в твэле значительно упрощается, так как  $T \neq f(\varphi, z)$ , и сводится к отысканию функции  $T = f(r)$ , которая характеризует одномерное стационарное температурное поле.

В качестве примера найдем одномерное стационарное температурное поле  $T = f(r)$  в одиночном твэле, оболочка которого омывается теплоносителем с заданной и не изменяющейся по высоте твэла температурой  $T_f$ , при следующих исходных данных [42, 43]:

– радиус и диаметр топливного стержня соответственно равны:  $r_T = 3,8 \cdot 10^{-3}$  м;  $d_T = 7,6 \cdot 10^{-3}$  м;

– толщина контактного слоя  $\delta_{\text{кк}} = 0,1 \cdot 10^{-3}$  м и тогда радиус и диаметр контактного слоя равны:  $r_{\text{кк}} = 3,9 \cdot 10^{-3}$  м;  $d_{\text{кк}} = 7,8 \cdot 10^{-3}$  м;

– толщина оболочки  $\delta_{\text{об}} = 0,65 \cdot 10^{-3}$  м и тогда радиус и диаметр оболочки твэла равны:  $r_{\text{об}} = 4,55 \cdot 10^{-3}$  м;  $d_{\text{об}} = 9,1 \cdot 10^{-3}$  м;

– коэффициент теплопроводности керамического тугоплавкого топлива – диоксида урана  $\text{UO}_2$  в интервале температур  $T = 500 \div 2000$  °С уменьшается от  $\lambda_{\text{T}} = 4,3$  Вт/(м·К) до  $\lambda_{\text{T}} = 2,1$  Вт/(м·К). Для расчета температурного поля топливного стержня примем коэффициент теплопроводности топлива  $\lambda_{\text{T}} = 3,0$  Вт/(м·К);

– коэффициент теплопроводности гелия, заполняющего контактный слой, в интервале температур  $T = 300 \div 650$  °С увеличивается от  $\lambda_{\text{кк}} = 0,244$  Вт/(м·К) до  $\lambda_{\text{кк}} = 0,341$  Вт/(м·К). Для расчета температурного поля топливного цилиндрического стержня примем коэффициент теплопроводности контактного слоя  $\lambda_{\text{кк}} = 0,3$  Вт/(м·К);

– коэффициент теплопроводности оболочки твэла, выполненной из циркония, легированного ниобием (1%) в интервале температур  $T = 300 \div 400$  °С, равен  $\lambda_{\text{об}} = 18$  Вт/(м·К);

– мощность внутреннего тепловыделения в топливном сердечнике примем  $q_{\text{v}} = 4,6 \cdot 10^8$  Вт/м<sup>3</sup>;

– температуру теплоносителя примем  $T_{\text{f}} = 300$  °С;

– коэффициент теплоотдачи примем равным  $\alpha = 20000$  Вт/(м<sup>2</sup>·К).

Кратко запишем исходные данные для решения поставленной задачи:

Дано:

$$r_T = 3,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}; d_T = 7,6 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\delta_{\text{кс}} = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}; r_{\text{кс}} = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}; d_{\text{кс}} = 7,8 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\delta_{\text{об}} = 0,65 \cdot 10^{-3} \text{ м}; r_{\text{об}} = 4,55 \cdot 10^{-3} \text{ м}; d_{\text{об}} = 9,1 \cdot 10^{-3}$$

м;

$$\lambda_T = 3,0 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К});$$

$$\lambda_{\text{кс}} = 0,3 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К});$$

$$\lambda_{\text{об}} = 18 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К});$$

$$q_V = 4,6 \cdot 10^8 \text{ Вт}/\text{м}^3;$$

$$T_f = 300^0 \text{ С}; \alpha = 20000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

Найти:

- температуру на оси тепловыделяющего стержня  $T_c$  ;
- температуру на поверхности тепловыделяющего стержня  $T_w$  ;
- температуру тепловыделяющего стержня в точках  $r = 1, 2, 3$  мм ( $T_{r=1\text{мм}}$  ;  $T_{r=2\text{мм}}$  ;  $T_{r=3\text{мм}}$  ) ;
- температуру на внутренней поверхности оболочки твэла  $T_{\text{об},1}$  ;
- температуру на внешней поверхности оболочки твэла  $T_{\text{об},2}$  ;
- перепад температур в топливном стержне  $\Delta T_T$  ;
- перепад температур в контактном слое  $\Delta T_{\text{кс}}$  ;
- перепад температур в оболочке твэла  $\Delta T_{\text{об}}$  ;
- перепад температур в пограничном слое  $\Delta T_{\alpha}$  ;
- поверхностную плотность теплового потока  $q_w$  ;
- линейную плотность теплового потока  $q_{\ell}$  .

### *Решение*

Температурное поле в твэле формируется под действием внутренних источников теплоты в топливном сердечнике и за счет теплообмена оболочки твэла с окружающим его теплоносителем.

Плотность теплового потока, уходящего с поверхности топливной таблетки, найдем по формуле (6.38):

$$q_w = \frac{q_v r_T}{2} = \frac{4,6 \cdot 10^8 \cdot 3,8 \cdot 10^{-3}}{2} = 8,74 \cdot 10^5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}. \quad (6.89)$$

Линейную плотность теплового потока рассчитаем по формуле (6.37)):

$$q_\ell = q_v \pi r_T^2 = 4,6 \cdot 10^8 \cdot 3,14 \cdot (3,8 \cdot 10^{-3})^2 = 20857 \frac{\text{Вт}}{\text{м}}. \quad (6.90)$$

Зная линейную плотность теплового потока  $q_\ell = 20857 \text{ Вт/м}$  и заданную по условию задачи температуру теплоносителя  $T_f = 300^\circ\text{C}$ , найдем температуру на поверхности цилиндрического тепловыделяющего стержня  $T_w$ , температуру на внутренней поверхности оболочки твэла  $T_{об,1}$  и температуру на внешней поверхности оболочки твэла  $T_{об,2}$  по формулам стационарной теплопередачи через цилиндрическую многослойную стенку (см. § 4.4.2).

Формула теплопередачи через цилиндрическую стенку на участке теплопереноса от температуры поверхности твэла  $T_w$  до температуры теплоносителя  $T_f$  имеет вид:

$$q_\ell = \frac{\pi(T_w - T_f)}{R_{\ell,кс} + R_{\ell,об} + R_{\ell,\alpha}}, \quad (6.91)$$

где  $R_{\ell, \text{кс}}$  – линейное термическое сопротивление теплопроводности контактного слоя, (м·К)/Вт;  $R_{\ell, \text{об}}$  – линейное термическое сопротивление теплопроводности оболочки твэла, (м·К)/Вт;  $R_{\ell, \alpha}$  – линейное термическое сопротивление теплоотдачи от оболочки твэла к теплоносителю, (м·К)/Вт.

Пренебрегая в силу малости конвективным переносом теплоты в контактном слое, линейное термическое сопротивление теплопроводности контактного слоя равно:

$$R_{\ell, \text{кс}} = \frac{1}{2\lambda_{\text{кс}}} \ln \frac{r_{\text{кс}}}{r_{\text{т}}} = \frac{1}{2 \cdot 0,3} \ln \frac{3,9}{3,8} = 0,043292 \frac{\text{м} \cdot \text{К}}{\text{Вт}}.$$

Линейное термическое сопротивление теплопроводности оболочки твэла:

$$R_{\ell, \text{об}} = \frac{1}{2\lambda_{\text{об}}} \ln \frac{r_{\text{об}}}{r_{\text{кс}}} = \frac{1}{2 \cdot 18} \ln \frac{4,55}{3,9} = 0,003854 \frac{\text{м} \cdot \text{К}}{\text{Вт}}.$$

Линейное термическое сопротивление теплоотдачи от оболочки твэла к теплоносителю:

$$R_{\ell, \alpha} = \frac{1}{\alpha \cdot d_{\text{об}}} = \frac{1}{20000 \cdot 9,1 \cdot 10^{-3}} = 0,005494 \frac{\text{м} \cdot \text{К}}{\text{Вт}}.$$

Анализируя результаты расчета термических сопротивлений, видим, что термическое сопротивление теплопроводности контактного слоя на порядок больше термического сопротивления оболочки и термического сопротивления теплоотдачи ( $R_{\ell, \text{кс}} \gg R_{\ell, \text{об}}$  и  $R_{\ell, \text{кс}} \gg R_{\ell, \alpha}$ ). Следовательно, и перепад температур в контактном слое больше перепада температур в оболочке и в тепловом пограничном слое теплоносителя около наружной поверхности оболочки ( $\Delta T_{\text{кс}} \gg \Delta T_{\text{об}}$  и  $\Delta T_{\text{кс}} \gg \Delta T_{\alpha}$ ).

Перепад температур на участке теплоотдачи  $\Delta T_\alpha$  и температуру наружной поверхности твэла  $T_{об,2}$  найдем по формуле теплоотдачи на участке теплообмена от температуры  $T_{об,2}$  до температуры теплоносителя  $T_f$ :

$$q_\ell = \frac{\pi \Delta T_\alpha}{R_{\ell,\alpha}} = \frac{\pi(T_{об,2} - T_f)}{R_{\ell,\alpha}}. \quad (6.92)$$

Из формулы (6.92) следует, что

$$\Delta T_\alpha = q_\ell \cdot \frac{R_{\ell,\alpha}}{\pi} = 20857 \cdot \frac{0,005494}{3,14} = 36,5 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$T_{об,2} = T_f + \Delta T_\alpha = 300 + 36,5 = 336,5 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Перепад температур в оболочке твэла найдем по формуле стационарной теплопроводности на участке теплообмена от температуры  $T_{об,1}$  до температуры  $T_{об,2}$ :

$$q_\ell = \frac{\pi \Delta T_{об}}{R_{\ell,об}} = \frac{\pi(T_{об,1} - T_{об,2})}{R_{\ell,об}}. \quad (6.93)$$

Из формулы (6.93) следует, что

$$\Delta T_{об} = q_\ell \cdot \frac{R_{\ell,об}}{\pi} = 20857 \cdot \frac{0,003854}{3,14} = 25,6 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$T_{об,1} = T_{об,2} + \Delta T_{об} = 336,5 + 25,6 = 362,1 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Перепад температур в контактном слое твэла найдем по формуле стационарной теплопроводности на участке теплообмена от температуры  $T_w$  до температуры  $T_{об,1}$ :

$$q_{\ell} = \frac{\pi \Delta T_{\text{кк}}}{R_{\ell, \text{кк}}} = \frac{\pi (T_{\text{в}} - T_{\text{об,1}})}{R_{\ell, \text{кк}}}. \quad (6.94)$$

Из формулы (6.94) следует, что

$$\Delta T_{\text{кк}} = q_{\ell} \cdot \frac{R_{\ell, \text{кк}}}{\pi} = 20857 \cdot \frac{0,043292}{3,14} = 287,6 \text{ }^{\circ}\text{C};$$

$$T_{\text{в}} = T_{\text{об,1}} + \Delta T_{\text{кк}} = 362,1 + 287,6 = 649,7 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Перепад температур в цилиндрическом тепловыделяющем стержне (топливной таблетке) найдем по формуле (6.34):

$$\Delta T_{\text{T}} = T_{\text{с}} - T_{\text{в}} = \frac{q_{\text{v}} r_{\text{T}}^2}{4\lambda} = \frac{4,6 \cdot 10^8 \cdot (3,8 \cdot 10^{-3})^2}{4 \cdot 3} = 553,5 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Откуда следует, что температура на оси цилиндрического тепловыделяющего стержня равна:

$$T_{\text{с}} = T_{\text{в}} + \Delta T_{\text{T}} = 649,7 + 553,5 = 1203,2 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Температуру в указанных в задании точках по сечению топливного стержня ( $T_{\text{r}=1\text{мм}}$ ;  $T_{\text{r}=2\text{мм}}$ ;  $T_{\text{r}=3\text{мм}}$ ) рассчитаем по формуле (6.28), которая в обозначениях решаемой задачи принимает вид:

$$T(r) = T_{\text{в}} + \frac{q_{\text{v}}}{4\lambda_{\text{T}}} (r_{\text{T}}^2 - r^2), \quad (6.95)$$

где  $r_{\text{T}}$  – радиус топливной таблетки, м;  $r$  – текущий радиус ( $0 \leq r \leq r_{\text{T}}$ ), м.

Подставляя в формулу (6.95) заданные значения радиуса в сечении топливного цилиндрического стержня, получим:

$$T_{r=1\text{мм}} = 649,7 + \frac{4,6 \cdot 10^8}{4 \cdot 3} \left( (3,8 \cdot 10^{-3})^2 - (1 \cdot 10^{-3})^2 \right) =$$

$$= 649,7 + 515,2 = 1164,9 \text{ } ^0\text{C};$$

$$T_{r=2\text{мм}} = 649,7 + \frac{4,6 \cdot 10^8}{4 \cdot 3} \left( (3,8 \cdot 10^{-3})^2 - (2 \cdot 10^{-3})^2 \right) =$$

$$= 649,7 + 400,2 = 1049,9 \text{ } ^0\text{C};$$

$$T_{r=3\text{мм}} = 649,7 + \frac{4,6 \cdot 10^8}{4 \cdot 3} \left( (3,8 \cdot 10^{-3})^2 - (3 \cdot 10^{-3})^2 \right) =$$

$$= 649,7 + 208,5 = 858,2 \text{ } ^0\text{C}.$$

Результаты расчета температурного поля твэла при заданных исходных данных представлены в табл. 6.1 и графически на рис. 6.8.

Перепады температур по сечению твэла равны:

- на участке теплоотдачи  $\Delta T_{\alpha} = 36,5 \text{ } ^0\text{C}$  ;
- в оболочке твэла  $\Delta T_{об} = 25,6 \text{ } ^0\text{C}$  ;
- в контактном слое  $\Delta T_{кк} = 287,6 \text{ } ^0\text{C}$  ;
- в топливной таблетке  $\Delta T_{т} = 553,5 \text{ } ^0\text{C}$  .

Таблица 6.1

Температурное поле твэла

г, мм	0	1,0	2,0	3,0	3,8	3,9	4,55	$\infty$
T, °C	T <sub>с</sub> 1203,2	T <sub>r=1мм</sub> 1164,9	T <sub>r=2мм</sub> 1049,9	T <sub>r=3мм</sub> 858,2	T <sub>w</sub> 649,7	T <sub>об,1</sub> 362,1	T <sub>об,2</sub> 336,2	T <sub>f</sub> 300

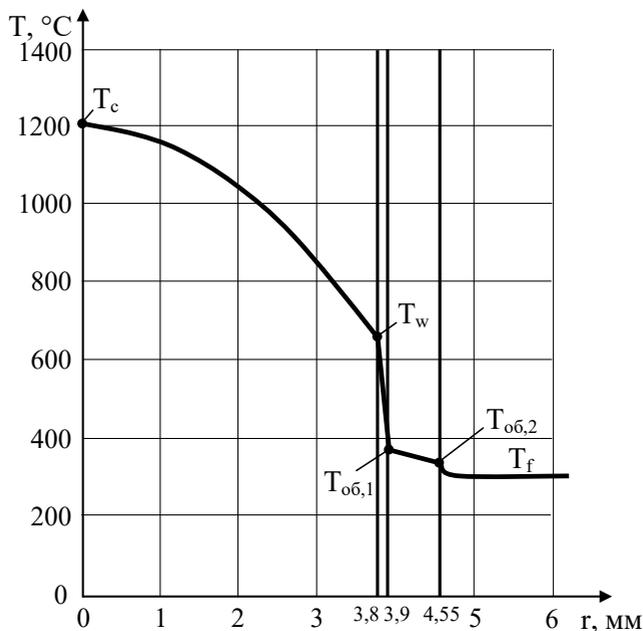


Рис. 6.8. Температурное поле тепловыделяющего элемента

Анализ результатов теплового расчета позволяет сделать вывод о том, что наибольшее термическое сопротивление теплопередачи на участке теплообмена от поверхности топлива к теплоносителю наблюдается в контактном слое твэла. Заметим, что проблема расчета термического сопротивления контактного слоя заключается в том, что контактный слой (зазор между топливной таблеткой и оболочкой) в чистом виде существует только в начале работы твэла. Затем в процессе эксплуатации твэла происходит расширение и растрескивание топлива, что приводит к уменьшению контактного слоя. Также изменяются и теплопроводные свойства контактного слоя вследствие накопления газовых продуктов деления [42].

**Замечание.** Расчет теплопередачи на участке теплообмена от температуры поверхности цилиндрического тепловыделяющего стержня  $T_w$  до температуры теплоносителя  $T_f$  можно выполнить по формулам теплопередачи для плоской стенки из-за малости толщины контактного слоя и толщины оболочки с погрешностью менее 4% (см. § 4.4.2).

### **Контрольные вопросы по материалам шестой главы**

1. Напишите математическую модель стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты в телах простой формы.

2. Напишите дифференциальное уравнение стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты для тел простой формы в дивергентной и обычной форме записи.

3. Напишите условия однозначности для решения дифференциального уравнения стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты для тел простой формы.

4. Напишите математическую модель стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты в неограниченной пластине.

5. Напишите математическую модель стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты в неограниченном цилиндре.

6. Напишите математическую модель стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты в шаре.

7. Напишите математическую модель стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты в цилиндрической стенке при отводе теплоты только от внутренней поверхности стенки.

8. Напишите математическую модель стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты в цилиндрической стенке при отводе теплоты только от наружной поверхности стенки.

9. Напишите математическую модель стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты в

цилиндрической стенке при отводе теплоты от внутренней и наружной поверхностей стенки.

10. Напишите формулу для расчета перепада температур по сечению неограниченной пластины при стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты.

11. Напишите формулу для расчета перепада температур по сечению неограниченного цилиндра при стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты.

12. Напишите формулу для расчета перепада температур по сечению шара при стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты.

13. Напишите единую формулу для расчета перепада температур по сечению тела простой формы при стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты.

14. Напишите формулу для расчета поверхностной плотности теплового потока, уходящего с поверхности неограниченной пластины при стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты.

15. Напишите формулу для расчета поверхностной плотности теплового потока, уходящего с поверхности неограниченного цилиндра при стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты.

16. Напишите формулу для расчета линейной плотности теплового потока, уходящего с поверхности неограниченного цилиндра при стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты.

17. Напишите формулу для расчета поверхностной плотности теплового потока, уходящего с поверхности шара при стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты.

18. Напишите единую формулу расчета поверхностной плотности теплового потока, уходящего с поверхности тела простой формы при стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты

19. Напишите единую формулу для расчета температурного поля по сечению тела простой формы при стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты.

20. Напишите единую формулу для расчета температуры на поверхности тела простой формы при стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты.

21. Напишите единую формулу для расчета температуры в тепловом центре тела простой формы при стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты.

22. Нарисуйте график температурного поля в цилиндрической стенке при стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты при отводе теплоты только от внутренней поверхности стенки.

23. Нарисуйте график температурного поля в цилиндрической стенке при стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты при отводе теплоты только от наружной поверхности стенки.

24. Нарисуйте график температурного поля в цилиндрической стенке при стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты при отводе теплоты от внутренней и наружной поверхностей стенки.

25. Укажите закон изменения температуры по сечению тела простой формы при стационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты.

26. Нарисуйте температурное поле в тепловыделяющем элементе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кирпичев, М.В. Теплопередача: Учебник для энергетических вузов / М. В.Кирпичев, М. А. Михеев, Л. С. Эйгенсон; Государственное энергетическое изд-во.- М-Л, 1940. – 292 с.
2. Михеев, М.А. Основы теплопередачи: учебник для энергетических и электротехнических вузов и факультетов / ГЭИ.- М-Л, 1956. – 390 с.- Издание третье, переработанное.
3. Шорин, С.Н. Теплопередача: учеб. пособие / С.Н. Шорин. – М.: Высш. шк., 1964.– 490 с.
4. Теория тепломассообмена: учебник для технических университетов и вузов ; под ред. А.И. Леонтьева.– 2-е изд., испр. и доп.– М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 683 с.
5. Исаченко, В.П. Теплопередача: учеб. для вузов / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. – М.: Энергоиздат, 1981. – 416 с.
6. Михеев, М.А. Основы теплопередачи / М.А. Михеев, И.М. Михеева. – М.: Энергия, 1977. – 344 с.
7. Вейник, А.И. Техническая термодинамика и основы теплопередачи: учеб. пособие. – М.: Металлургия, 1965.– 375 с.
8. Бровкин, Л.А. Температурные поля тел при нагреве и плавлении в промышленных печах / Л.А. Бровкин / Изд-во ИЭИ. – Иваново, 1973. – 364 с.
9. Галин, Н.М. Тепломассообмен (в ядерной энергетике) / Н.М. Галин, Л.П. Кириллов. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 376 с.
10. Арутюнов, В.А. Математическое моделирование промышленных печей / В.А. Арутюнов, В.В. Бухмиров, С.А. Крупеников. – М.: Металлургия, 1990. – 239 с.
11. Сапожников, С.З. Техническая термодинамика и теплопередача: учебник для вузов / С.З. Сапожников, Э.Л. Китанин. – СПб.: Изд-во СПб ГТУ, 1999. – 319 с.
12. Кириллов, П.Л. Тепломассообмен в ядерных энергетических установках / П.Л. Кириллов, Г.П. Богословская. – М.: Энергоатомиздат, 2000. – 456 с.
13. Цветков, Ф.Ф. Тепломассообмен: учебник для вузов / Ф.Ф. Цветков, Б.А. Григорьев. – М.: Издательский дом МЭИ, 2011. – 562 с.

14. Солодов, А.П. Практикум по теплопередаче: учеб. пособие для вузов / А.П. Солодов, Ф.Ф. Цветков, А.В. Елисеев, В.А. Осипова; под ред. А.П. Солодова. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 296 с.
15. Теплотехнический справочник / под ред. В.Н. Юренева и П.Д. Лебедева. Т. 2. – М.: Энергия, 1976. – 896 с.
16. Краснощеков, Е.А. Задачник по теплопередаче / Е.А. Краснощеков, А.С. Сукомел. – М.: Энергия, 1980. – 288 с.
17. Коновалов, В.И. Техническая термодинамика: учебник / ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». – 2-е изд. – Иваново, 2005. – 620 с.
18. Блох, А.Г. Теплообмен излучением / А.Г. Блох, Ю.А. Журавлев, Л.Н. Рыжков. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 431 с.
19. Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вибищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
20. Бухмиров, В.В. Исследование процесса нестационарной теплопроводности и термонапряженного состояния твердых тел на имитационной математической модели / В.В. Бухмиров, Т.Е. Созинова, С.В. Носова, К.Б. Никитин; ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». – Иваново, 2003. – 38 с.
21. Бухмиров, В.В. Справочные материалы для решения задач по курсу «Тепломассообмен» / В.В. Бухмиров, Д.В. Ракутина; ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». – Иваново, 2017. – 120 с.
22. Бакластов, А.М. Промышленные тепломассообменные процессы и установки: учебник для вузов / А.М. Бакластов, В.А. Горбенко, О.Л. Данилов; под ред. А.М. Бакластова. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 328 с.
23. Справочник по теплообменникам: В 2 т. Т.1 Пер. с англ.; под ред. Б.С. Петухова. В.К. Шикова. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 560 с.
24. Кэйс В.М. Компактные теплообменники / В.М. Кэйс, А.Л. Лондон. – М.: Энергия, 1967. – 224 с.

25. Маньковский, О.Н. Теплообменная аппаратура химических производств / О.Н. Маньковский, А.Р. Толчинский, М.В. Александров. – Л.: Химия, 1976. – 368 с.

26. Бажан, П.И. Справочник по теплообменным аппаратам / П.И. Бажан, Г.Е. Каневец, В.М. Селиверстов. – М.: Машиностроение, 1989. – 367 с.

27. Калинин, Э.К. Эффективные поверхности теплообмена / Э.К. Калинин, Г.А. Дрейцер, И.З. Копп, А.С. Мясочкин. – М.: Энергоатомиздат, 1998. – 408 с.

28. Гавра, Г.Г. Тепловой и гидравлический расчет теплообменных аппаратов компрессорных установок: учеб. пособие / Г.Г. Гавра, П.М. Михайлов, В.В. Рис. – Л., ЛПИ, 1982. – 72 с.

29. Байгалиев, Б.Е. Теплообменные аппараты: учеб. пособие / Б.Е. Байгалиев, А.В. Щелчков, А.Б. Яковлев, П.Ю. Гортышев. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. – 180 с.

30. Зысин, Л.В. Теплообменное оборудование: учеб. пособие / Л.В. Зысин, А.А. Калютник. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 230 с.

31. Идельчик, И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / под ред. М. О. Штейнберга.— 3-е изд., перераб. и доп. – М.; Машиностроение, 1992.— 672 с.

32. Альтшуль, А.Д. Гидравлические сопротивления.— 2-е изд. перераб. и доп. - М.: Недра, 1982.— 224 с

33. Бухмиров, В.В. Теплообмен: учеб. пособие / ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». – Иваново, 2014. – 360 с.

34. Бухмиров, В.В. Теоретические основы теплотехники: курс лекций / В.В. Бухмиров, А.Ю. Гильмутдинов, Г.Н. Щербакова; ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». – Иваново, 2007. – 84 с.

35. Бухмиров, В.В. Теоретические основы теплотехники. Основы теплообмена / В.В. Бухмиров; ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». – Иваново, 2011. – 68 с

36. Бухмиров, В.В. Теоретические основы теплотехники в примерах и задачах. Учеб. пособие / В.В. Бухмиров, Г.Н. Щербакова, А.В. Пекунова / ФГБОУВПО «Ивановский

государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». – Иваново, 2013. – 128 с.

37. Бухмиров, В.В. Стационарная теплопроводность и теплопередача» курса ТМ / В.В. Бухмиров, Т.Е. Созинова; ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И.Ленина». – Иваново, 2018. – 88 с.

38. Бухмиров, В.В.Тепловой и гидравлический расчет рекуперативного теплообменного аппарата: учеб. пособие / В.В. Бухмиров, Д.В. Ракутина, М.В. Родионова. А.К. Гаськов; ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». – Иваново, 2021. – 164 с

39. Бухмиров, В.В. Нестационарная теплопроводность. Справочные материалы для решения задач / В.В. Бухмиров, Д.В. Ракутина, Ю.С. Солнышкова / ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». – Иваново, 2013. – 36 с.

40. Бровкин, Л.А. Теплообмен и тепловые режимы промышленных печей: учеб. пособие / Л.А. Бровкин / Ивановский гос. университет. – Иваново, 1982. – 88 с.

41. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика /П. Роуч. Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 616 с.

42. Жуков, А.В. Теплогидравлический расчет реакторов. Часть 1. Общие вопросы: лекции для студентов / А.В. Жуков ; ГНЦ РФ ФЭИ. – Обнинск, 2001. – 210 с.

43. Кириллов, П.Л. Теплофизические свойства материалов ядерной техники: учеб. справоч. пособие / П.Л. Кириллов, М.И. Терентьева, Н.Б. Денискина; под общ. ред. проф. П.Л. Кириллова; 2-е изд. перераб. и доп. – М.: ИздАт, 2007.– 200 с.

44. Цветков, Ф.Ф. Задачник по тепломассообмену / Ф.Ф. Цветков, Р.В. Керимов, В.И. Величко; под ред. Ф.Ф. Цветкова. – М.: Изд-во МЭИ, 1997. – 136 с.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### П.1. Физические свойства веществ [21]

#### П.1.1. Физические свойства твердых тел

Таблица П.1.1

**Плотность ( $\rho$ ), коэффициент теплопроводности ( $\lambda$ ) и удельная теплоемкость ( $c$ ) строительных, теплоизоляционных и других материалов**

Материалы	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	T, °C	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$c$ , кДж/(кг·К)
Альфонь при толщине воздушных слоев	–	–	$0,0302+0,85 \cdot 10^{-4}t$	–
Асбест распушенный:				
3-й сорт	340	–	$0,087+0,24 \cdot 10^{-3}t$	0,816
6-й сорт	650	–	$0,11+0,19 \cdot 10^{-3}t$	0,816
Асбестовый картон	900	–	$0,16+0,17 \cdot 10^{-3}t$	0,816
Асбестовый шнур	800	–	$0,13+0,15 \cdot 10^{-3}t$	0,816
Асбошифер:				
с высоким содержанием асбеста	1800	20	0,17 – 0,35	–
с 10–50 % асбеста (сухой)	1800	20	0,64 – 0,52	–
Асфальт	2120	0–30	0,60–0,74	1,67
Бетон с каменным щебнем	2000	0	1,28	0,84
То же сухой	1600	0	0,84	–
Железобетон набивной	2200	0	1,55	0,84
Шлакобетон	1500	0	0,7	0,8
Бумага обыкновенная	–	20	0,14	1,51
Вата хлопчатобумажная	80	30	0,042	–
Гипс (формованный сухой)	1250	20	0,43	0,8–0,92
Глина	2000–1600	20	0,9–0,7	0,84
Глина огнеупорная	1845	450	1,04	1,09
Гравий	1840	20	0,36	–
Дельта–древесина	–	35–70	0,21	–
Дерево:				
дуб поперек волокон	825	0–15	0,20–0,21	2,39
дуб вдоль волокон	819	дек.50	0,35–0,43	2,39
сосна поперек волокон	546	0–50	0,14–0,16	2,72
сосна вдоль волокон	–	20–25	0,35–0,72	2,72
Каменный уголь:				
газовый	1420	20–100	3,6–4,0	–
обыкновенный твердый	1200–1350	20	0,24–0,27	–
Каменноугольная пыль	730	30–150	0,12–0,13	–
Картон	–	20	0,14–0,35	1,51

Продолжение табл. П.1.1

Материалы	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	T, °C	$\lambda$ , Вт/(м·К)	c, кДж/(кг·К)
Кембрик (лакированный)	–	38	0,157	–
Кирпич:				
красный машинной формовки	1800	0	0,77	0,88
силикатный	1900	0	0,81	0,84
Кладка из красного кирпича:				
на холодном растворе	1700	0	0,81	0,88
на теплом растворе	1600	0	0,67	0,84
Кладка из силикатного кирпича:				
на холодном растворе	1900	0	0,87	0,84
на теплом растворе	1700	0	0,76	0,8
Кладка бутовая из камней средней плотности	2000	0	1,28	0,88
Карболит черный	1150	50	0,231	–
Кожа	–	20	0,14–0,16	–
Кокс порошкообразный	449	100	0,191	1,21
Котельная накипь:				
богатая гипсом	2000–2700	100	0,7–2,3	–
богатая известью	1000–2500	100	0,15–2,3	–
богатая силикатом	300–1200	100	0,08–0,23	–
Кварц кристаллический:				
поперек оси	–	0	0,72	–
вдоль оси	–	0	1,94	–
Ламповая сажа	165	40	0,07–0,12	–
Лед	917	0	2,2	2,26
Лед	928	–100	3,5	1,17
Льняная ткань	–	–	0,088	–
Магnezия в форме сегментов для изоляции труб	266	50–200	0,073–0,084	–
Мел	2000	50	0,9	0,88
Миканит	–	20	0,21–0,41	–
Мрамор	2800	0	3,5	0,92
Парафин	920	20	0,27	–
Песок речной мелкий (сухой)	1520	0–160	0,30–0,38	0,8
Песок речной мелкий (влажный)	1650	20	1,13	2,09
Прессшпан	–	20–50	0,26–0,22	–
Плексиглас	–	20	0,184	–
Пробковые плиты сухие	148–198	80	0,042–0,053	1,76

Окончание табл. П.1.1

Материалы	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	T, °C	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$c$ , кДж/(кг·К)
Пробковая мелочь, величина куска 4–5 мм	85	0–60	0,044–0,058	1,76
Резина:				
твердая обыкновенная	1200	0–100	0,157–0,160	1,38
мягкая	–	20	0,13–0,16	1,38
Сахарный песок	1600	0	0,58	1,26
Сера ромбическая	–	21	0,28	0,762
Сланец	–	94	1,49	–
Слюда (поперек слоев)	2600–3200	20	0,49–0,58	–
Снег:				
свежевыпавший	200	–	0,1	2,09
уплотненный	400	–	0,46	2,09
Стекло:				
зеркальное	2550	0–100	0,78–0,88	0,779
обыкновенное	2500	20	0,74	0,67
термометрическое	2590	20	0,96	–
пирекс	–	0	1,04	–
то же	–	400	1,55	–
кварцевое	–	400	1,76	–
то же	–	800	2,4	–
то же	–	1200	3,05	–
Стекланная вата	154–206	88	0,051–0,059	–
Текстолит	1300–1400	20	0,23–0,34	1,46–1,51
Фарфор	2400	95	1,04	1,09
То же	2400	1055	1,96	1,09
Фибра красная	1290	20–100	0,46–0,50	–
Фибролит	360–440	80	0,073–0,128	–
Целлулоид	1400	30	0,21	–
Шелк	100	0–93	0,043–0,06	–
Эбонит	1200	20	0,157–0,17	–
Шлак:				
котельный	1000	0	0,29	0,75
доменный гранулированный	50	0	0,15	0,75
Штукатурка:				
известковая	1600	0	0,7	0,84
цементно-песчаная	1800	0	1,2	0,84
Фанера клееная	600	0	0,15	2,51
Уголь древесный кусковой	190	80	0,074	–

**Таблица П.1.2**  
**Плотность ( $\rho$ ), коэффициент теплопроводности ( $\lambda$ ), удельная**  
**теплоемкость ( $c$ ) и максимальная рабочая температура ( $T$ ) для основных**  
**огнеупорных изделий**

Наименование огнеупора	$\rho \cdot 10^{-3}$ , кг/м <sup>3</sup>	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$c$ , кДж/(кг·К)	$T$ , °С
Шамотный кирпич	1,8–1,9	0,84+0,0006 · t	0,88+0,00230 · t	1350–1450
Пеношамот	0,95	0,28+0,00023 · t	–	1350
Пеношамот	0,6	0,10+0,000145 · t	–	1300
Кирпич:				
динасовый	0,9–1,95	0,9+0,0007 · t	0,8+0,00025 · t	1700
магнезитовый	2,6–2,8	4,65 – 0,0017 · t	1,05+0,0003 · t	1650–1700
хромомagneзи- товый	2,75–2,85	1,86–1,98 (0–600 °С)	–	1700
хромитовый	3,0–3,1	1,3+0,00041 · t	0,8+0,0003 · t	1650–1700
Изделия:				
силлиманитовые (муллитовые)	2,2–2,4	1,69 – 0,00023 · t	0,8+0,00025 · t	1650
корундовые (алундовые)	2,3–2,6	2,09+0,0019 · t	0,80+0,0004 · t	1600–1700
циркониевые	3,3	1,30+0,00064 · t	0,54 – 0,00012 · t	1750–1800
карборундовые (карбофракс)	2,3–2,6	21 – 0,010 · t	0,96+0,000146 · t	1400–1500
угольные	1,35–1,6	23+0,035 · t (до 1000°С)	0,8	2000
графитовые	1,6	163 – 0,041 · t	0,8	2000

**Таблица П.1.3**  
**Плотность ( $\rho$ ), коэффициент теплопроводности ( $\lambda$ ) и предельная температура**  
**применения ( $t$ ) основных изоляционных материалов и изделий**

Наименование материала или изделия	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>		$\lambda$ , Вт/(м·К)	$T$ , °С
	в порошке	в мастичной конструкции		
<b>Изоляционные материалы</b>				
Асбест пушенный 6-го сорта	800	–	0,130+0,00019·t	700
Асбозолит	350	500–550	0,143+0,00019·t	700
Асбозурит	450	700	0,1622+0,000169·t	200–300
Асбослюда	400–500	580–650	0,120+0,000148·t	600
Асботермит	400–430	550–270	0,109+0,000145·t	500–550
Диатомит молотый	400–500	–	0,091+0,00028·t	800

Продолжение табл. П.1.3

Наименование материала или изделия	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>		$\lambda$ , Вт/(м·К)	Т, °С
	в порошке	в мастичной конструкции		
Зонолит (вермикулит)	150–250	–	0,072+0,00262·t	900–1100
Минеральная вата	180–250	–	0,046–0,058 при 50°С	500
Новоасбозурит	400–450	580–650	0,144+0,00014·t	250
Ньювелът	180–200	405–465	0,87+0,000064·t	325–370
Совелит	230–250	440–520	0,0901+0,000087·t	400–450
Торфяная крошка	200–350	–	0,06–0,08	100
Ферригипс (паста феррон)	–	400–550	0,07–0,08	650
Шлаковая вата (сорт 0)	170–200	–	0,06+0,000145·t	750
<b>Изоляционные изделия</b>				
Вермикулитовые плиты	–	350–380	0,081+0,00015·t	700–750
Вулканитовые плиты	–	400	0,080+0,00021·t	550–600
Войлок строительный	–	300	0,05 при 0 °С	90
Диатомовый кирпич	–	500–600	0,113+0,00023·t	850
Диатомовые скорлупы и сегменты	–	500–600	0,113+0,00023·t	850
Изделия «новоизоль»	–	400–450	0,073+0,00028·t	400
Камышитовые плиты	–	560–360	0,10 при 0 °С	100
Минеральный войлок	–	250–300	0,058–0,076 при 50 °С	–
Пенобетонные блоки	–	400–500	0,099–0,122 при 50°С	300
Пенодиатомовый кирпич	–	230–430	0,07–0,09 при 70°С	600–800
Пеностекло (газо-стекло)	–	290–450	0,124–0,160 при 70°С	600–800
Плиты «оргизоль»	–	280–350	0,078+0,00012·t	600

Продолжение табл. П.1.3

Наименование материала или изделия	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>		$\lambda$ , Вт/(м·К)	Т, °С
	в порошке	в мастичной конструкции		
Пробковые плиты	–	250	0,07 при 0 °С	120
Совелитовые плиты	–	400–450	0,079+0,00019·t	450–500
Соломитовые маты	–	260–360	0,10 при 0 °С	100
Торфоплиты	–	170–250	0,046+0,00014·t	100–120
Шлаковая и минеральная пробка	–	270–350	0,064–0,081 при 50°С	150

Таблица П.1.4

Коэффициент теплопроводности сталей ( $\lambda$ , Вт/(м·К))

Наименование и марка стали	Температура, °С								
	100	200	300	400	500	600	700	800	900
Углеродистая 15	54,4	50,2	46,0	41,9	37,7	33,5	–	–	–
Углеродистая 30	50,2	46,0	41,9	37,7	33,5	29,3	–	–	–
Хромомолибденовая X10C2M (ЭИ107)	18,4	–	21,7	–	–	24,6	25,5	–	–
Хромоникельвольфрамовая 4X14НВ2М (ЭИ69)	15,5	16,9	19,2	20,2	21,2	22,0	–	–	–
Хромоникелевая 1X18Н9Т (ЭЯ1Т)*	14,6	–	–	–	21,6	23,5	25,1	27,1	28,8
Хромоникелевая X25Н20С2 (ЭИ283)									
Хромистая нержавеющая:	24,0	23,6	23,3	23,3	23,7	24,4	–	–	–
	24,3	25,8	26,3	26,4	26,6	26,4	26,2	26,7	27,6
1X13 (Ж1)	25,1	25,6	25,6	25,6	25,6	25,6	24,6	–	–
2X13 (Ж2)	28,0	29,1	29,3	29,2	28,8	28,4	28,0	–	–
3X13 (Ж3)	24,4	–	–	–	–	–	–	–	–
4X13 (Ж4)	20,9	21,7	22,7	23,4	24,3	25,0	–	–	–
X17 (Ж17)									
X28 (Ж27)									

Примечание: \* Значения  $\lambda$  для различных образцов стали 1X18Н9Т изменяются в пределах  $\pm 20\%$ .

Здесь приведены средние значения  $\lambda$ .

**Таблица П.1.5**

**Коэффициент теплопроводности ( $\lambda$ , Вт/(м·К)) металлов и сплавов**

Наименование металла или сплава	Температура, °С							
	0	20	100	200	300	400	500	600
Алюминий	202	–	206	229	272	319	371	422
Алюминиевые сплавы:								
92% Al, 8% Mg	102	106	123	148	–	–	–	–
80% Al, 20% Si	158	160	169	174	–	–	–	–
Дюралюминий:								
94 – 96% Al, 3 – 5% Cu, 0,5% Mg	159	165	181	194	–	–	–	–
Латунь:	102	–	117	134	149	166	180	195
90% Cu, 10% Zn	106	–	109	110	114	116	120	121
70% Cu, 30% Zn	100	–	107	113	121	128	135	151
67% Cu, 33% Zn	106	–	120	137	152	169	186	200
60% Cu, 40% Zn	393	–	385	378	371	365	359	354
Медь (99,9%)								
Монель–металл:	–	22,1	24,4	27,6	30	34	–	–
29% Cu, 67% Ni, 2% Fe								
Нейзильбер:	–	25,0	31	40	45	49	–	–
62% Cu, 15% Ni, 22%Zn								
Нихром:	17,1	17,4	19,0	20,9	22,8	24,6	–	–
90% Ni, 10% Cr	12,2	13,6	13,8	15,6	17,2	19,0	–	22,6
80% Ni, 20% Cr								
Нихром железистый:	–	11,6	11,9	12,2	12,4	12,7	–	13,1
61%Ni, 15% Cr, 20% Fe, 4%Mn	11,9	12,1	13,2	14,6	16,0	17,4	–	–
61%Ni, 16% Cr, 23% Fe	63	–	57	52	46	42	36	31
Сталь мягкая								

Таблица П.1.6

Коэффициент теплопроводности сплавов ( $\lambda$ )

Сплав	T, °C	$\lambda$ , Вт/(м·К)
Алюминиевая бронза : 95% Cu, 5% Al	20	82
Бронза:		
90% Cu, 10% Sn	20	42
75% Cu, 25% Sn	20	26
88% Cu, 10% Sn, 2% Zn	20	48
Бронза фосфористая:		
92,8% Cu, 5% Sn, 0,15% P, 2% Zn	20	79
91,7% Cu, 8% Sn, 0,3% P	20	45
87,2% Cu, 12,4% Sn, 0,4% P	20	36
Инвар: 35% Ni, 65% Fe	20	11,0
Константан:		
60% Cu, 40% Ni	20	22,7
60% Cu, 40% Ni	100	25,6
Манганин:		
84% Cu, 4% Ni, 12% Mn	20	21,3
84% Cu, 4% Ni, 12% Mn	100	26,4
Магниеые сплавы:		
92% Mg, 8% Al	20–200	62–79
88% Mg, 10% Al, 2% Si	20–200	58–76
92% Mg, 8% Cu	20–200	126–132
Медные сплавы:		
70% Cu, 30% Mn	20	13
90% Cu, 10% Ni	20–100	58–76
80% Cu, 20% Ni	20–100	34–41
40% Cu, 60% Ni	20–100	22–26
Металл Розе: 50% Bi, 25% Pb, 25% Sn	20	16
Металл Вуда: 48% Bi, 26% Pb, 13% Sn, 13% Cd	20	13
Никелевые сплавы:		
70% Ni, 28% Cu, 2% Fe	20	35
62% Ni, 12% Cu, 26% Fe	20	13,5
Никелевое серебро	0	29,3
То же	100	37
Платиноиридий: 90% Pt, 10% Ir	0–100	30,9–31
Электрон: 93% Mg, 4% Zn, 0,5% Cu	20	116
Платинородий: 90% Pt, 10% Rh	0–100	30–30,6

**Таблица П.1.7**

**Коэффициент теплопроводности ( $\lambda$ , Вт/(м·К)) углеродистых сталей  
в зависимости от температуры**

Температура, °С	Марки стали						
	08кп	8	20	40	У8	У8'	У12
0	65,1	59,5	51,9	51,9	49,8	51,1	45,2
50	62,8	58,6	51,5	51,5	49,4	50,2	45,2
100	60,2	57,7	51,1	50,6	48,1	48,9	44,8
150	57,7	55,2	49,9	49,8	46,9	47,7	42,4
200	55,6	53,5	48,5	48,1	45,1	46,1	42,7
250	53,0	51,5	46,5	46,9	43,0	43,9	41,1
300	50,9	49,4	44,4	45,6	41,4	41,9	40,2
350	48,5	47,7	43,6	44,3	40,2	40,2	38,5
400	46,5	44,8	42,7	41,9	38,1	37,6	37,2
450	43,5	42,3	41,1	40,0	36,4	36,9	36,1
500	41,1	40,2	39,3	38,1	35,2	35,6	34,7
550	39,4	38,1	37,7	36,1	33,9	34,4	33,5
600	37,4	36,1	35,6	33,6	32,7	33,3	31,9
650	36,1	33,9	33,9	31,9	31,4	31,9	30,0
700	33,9	31,9	31,9	30,0	30,1	30,7	28,3
750	31,9	29,8	28,5	26,9	26,9	27,3	26,9
800	30,1	28,5	25,9	24,8	24,3	24,3	23,7
850	27,7	27,2	25,9	24,8	24,3	24,3	23,7
900	27,2	26,7	26,4	25,7	25,7	25,2	24,8
950	27,2	27,2	27,2	26,1	26,5	26,1	25,7
1000	27,7	27,7	27,7	26,9	26,9	26,9	26,1
1050	28,0	28,0	28,0	27,2	27,7	27,7	26,9
1100	28,5	28,5	28,5	28,0	28,6	28,6	27,2
1150	29,3	29,3	29,3	28,7	29,4	28,7	28,0
1200	29,8	29,8	29,8	29,5	30,2	29,5	28,6

**Таблица П.1.8**

**Средняя удельная теплоемкость ( $c_m$ , кДж/(кг·К)) углеродистых сталей  
различных марок в интервале температур от 50 до T °С**

Температура, °С	Углеродистые стали							
	Чистое железо (99,99%)	08кп	08	20	40	У8	У8'	У12
100	0,469	0,486	0,486	0,486	0,486	0,486	0,502	0,486
150	0,477	0,594	0,494	0,494	0,494	0,502	0,511	0,502
200	0,489	0,502	0,502	0,502	0,498	0,515	0,523	0,815
250	0,498	0,511	0,511	0,511	0,507	0,523	0,523	0,523
300	0,511	0,519	0,519	0,519	0,515	0,532	0,519	0,532
350	0,519	0,528	0,528	0,528	0,523	0,540	0,544	0,540
400	0,528	0,536	0,540	0,540	0,532	0,548	0,553	0,544
450	0,536	0,548	0,548	0,548	0,544	0,557	0,565	0,557
500	0,553	0,561	0,561	0,561	0,557	0,589	0,574	0,565
550	0,561	0,574	0,578	0,574	0,569	0,582	0,586	0,578
600	0,578	0,590	0,590	0,590	0,582	0,595	0,503	0,586
650	0,595	0,611	0,607	0,607	0,595	0,603	0,615	0,599
700	0,615	0,628	0,628	0,628	0,607	0,619	0,632	0,615
750	0,641	0,645	0,662	0,669	0,678	0,724	0,745	0,720
800	0,657	0,678	0,682	0,703	0,674	0,716	0,737	0,716
850	0,666	0,682	0,695	0,703	0,662	0,712	0,729	0,712
900	0,666	0,695	0,703	0,703	0,657	0,708	0,724	0,708
950	0,682	0,691	0,609	0,699	0,653	0,703	0,716	0,703
1000	0,678	0,691	0,695	0,695	0,653	0,699	0,712	0,699
1050	0,669	0,691	0,695	0,691	0,653	0,695	0,708	0,695
1100	0,666	0,691	0,695	0,691	0,649	0,695	0,703	0,695
1150	0,666	0,687	0,691	0,691	0,649	0,691	0,707	0,691
1200	0,666	0,687	0,691	0,687	0,649	0,691	0,699	0,691
1250	0,662	0,687	0,691	0,687	0,653	0,691	0,699	0,691
1300	0,662	0,699	0,687	0,687	0,653	0,691	0,699	0,687

**Таблица П.1.9**

**Средняя удельная теплоемкость ( $c_m$ , кДж/(кг·К)) углеродистых сталей**

Интервал температур, °С	Углеродистые стали							
	Чистое железо (99,99%)	08кп	08	20	40	У8	У8'	У12
50–100	0,469	0,481	0,481	0,486	0,486	0,489	0,498	0,486
100–150	0,489	0,502	0,502	0,507	0,502	0,519	0,523	0,519
150–200	0,511	0,519	0,523	0,519	0,515	0,532	0,544	0,540
200–250	0,528	0,536	0,544	0,532	0,528	0,548	0,548	0,544
250–300	0,544	0,553	0,557	0,557	0,548	0,565	0,565	0,557
300–350	0,565	0,574	0,569	0,574	0,569	0,586	0,552	0,578
350–400	0,586	0,595	0,595	0,599	0,586	0,607	0,603	0,599
400–450	0,611	0,624	0,624	0,624	0,611	0,628	0,632	0,615
450–500	0,649	0,662	0,662	0,662	0,649	0,669	0,666	0,636
500–550	0,691	0,708	0,695	0,703	0,691	0,695	0,708	0,662
550–600	0,733	0,754	0,741	0,749	0,708	0,716	0,749	0,699
600–650	0,775	0,799	0,791	0,787	0,733	0,720	0,779	0,745
650–700	0,829	0,867	0,858	0,846	0,770	0,770	0,833	0,816
700–750	0,971	1,105	1,139	0,432	1,583	2,081	2,186	2,089
750–800	0,913	0,875	0,959	0,950	0,624	0,615	0,632	0,649
800–850	0,754	0,795	0,867	0,737	0,502	0,657	0,619	0,657
850–900	0,716	0,849	0,716	0,649	0,548	0,619	0,619	0,619
900–950	0,946	0,662	0,649	0,649	0,624	0,624	0,619	0,619
950–1000	0,557	0,669	0,657	0,649	0,624	0,632	0,615	0,628
1000–1050	0,582	0,669	0,657	0,649	0,632	0,645	0,628	0,636
1050–1100	0,599	0,669	0,662	0,649	0,632	0,653	0,636	0,641
1100–1150	0,615	0,669	0,662	0,657	0,641	0,662	0,653	0,649
1150–1200	0,632	0,669	0,666	0,666	0,653	0,669	0,669	0,657
1200–1250	0,649	0,669	0,666	0,678	0,669	0,678	0,78	0,666
1250–1300	0,669	0,669	0,666	0,687	0,687	0,678	0,695	0,674

**Таблица П.1.10**

**Плотность углеродистых сталей ( $\rho$ , кг/м<sup>3</sup>)**

Температура, °С	Углеродистые стали					
	08кп	08	20	40	У8	У12
0	7876	7861	7863	7858	7855	7834
15	7871	7856	7859	7854	7851	7830
50	7861	7847	7849	7845	7842	7822
100	7846	7832	7834	7832	7829	7809
150	7830	7846	7819	7817	7815	7796
200	7814	7800	7803	7801	7800	7781
250	7798	7783	7787	7784	7784	7765
300	7781	7765	7770	7766	7767	7749
350	7763	7748	7753	7748	7749	7731
400	7745	7730	7736	7730	7731	7713
450	7727	7711	7718	7711	7713	7694
500	7708	7692	7699	7692	7694	7675
550	7688	7673	7679	7672	7675	7655
600	7668	7653	7659	7652	7655	7634
650	7648	7632	7635	7628	7632	7613
700	7628	7613	7617	7613	7612	7592
750	7610	7594	7620	7624	7604	7581
800	7598	7582	7624	7635	7594	7565
850	7601	7589	7616	7617	7565	7528
900	7602	7594	7600	7590	7533	7489
950	7580	7572	7574	7564	7509	7463
1000	7550	7543	7548	7538	7485	7438
1050	7523	7515	7522	7512	7460	7413
1100	7495	7488	7496	7486	7436	7388

**Таблица П.1.11**  
**Коэффициент температуропроводности углеродистых сталей ( $\alpha \cdot 10^6$ , м<sup>2</sup>/с)**

Интервал температур, °С	Углеродистые стали					
	08кп	08	20	40	У8	У12
50–100	16,39	15,28	13,61	13,33	12,78	11,94
100–150	14,72	14,44	12,78	12,78	11,67	11,11
150–200	13,89	13,33	12,22	12,22	11,11	10,56
200–250	13,06	12,50	11,39	11,39	10,28	10,00
250–300	12,22	11,67	10,56	10,83	9,72	9,44
300–350	11,11	11,11	10,00	10,28	8,89	8,89
350–400	10,28	10,00	9,17	9,44	8,33	8,06
400–450	9,44	9,17	8,61	8,61	7,78	7,78
450–500	8,33	8,06	7,78	7,78	6,94	7,22
500–550	7,50	7,22	7,22	6,94	6,39	6,67
550–600	6,67	6,39	6,39	6,39	6,11	6,11
600–650	6,11	5,83	5,83	5,83	5,83	5,56
650–700	5,28	5,00	5,00	5,28	5,28	4,72
700–750	3,89	3,61	2,78	2,50	1,94	1,67
750–800	4,72	3,89	3,89	5,56	5,56	5,28
800–850	4,72	4,17	4,72	5,00	5,28	5,28
850–900	4,17	4,44	5,28	5,28	5,28	5,28
900–950	5,28	5,28	5,28	5,28	5,59	5,28
950–1000	5,28	5,56	5,56	5,56	5,56	5,56
1000–1050	5,56	5,56	5,83	5,56	5,56	5,56
1050–1100	5,56	5,83	5,83	5,83	5,83	5,83

**Таблица П.1.12**  
**Коэффициент теплопроводности накипи ( $\lambda$ )**

Накипь	$\lambda$ , Вт/(м·К)
Силикатная накипь 20–25 % SiO <sub>2</sub>	0,058–0,233
Гипсовая накипь до 50% CaSO <sub>4</sub>	0,58–2,9
Карбонатная накипь CaCO <sub>3</sub> +MgCO <sub>3</sub>	0,58–0,7

**Таблица П.1.13**

**Интегральная степень черноты различных материалов**

Материал и характер поверхности	Температура *2, °С	ε *1
<i>Чистые и окисленные металлы</i>		
Алюминий:		
полированный	225–575	0,039–0,057
шероховатый	26	0,055
окисленный при 600 °С	200–600	0,11–0,19
Покрытая алюминием поверхность:		
меди при нагреве до 600 °С	200–600	0,18–0,19
стали при нагреве до 600 °С	200–600	0,52–0,57
Вольфрам	230–2230	0,053–0,31
Вольфрамовая нить	3300	0,39
Вольфрамовая нить, бывшая в употреблении	25–3300	0,032–0,35
Железо:		
электролитное, тщательно полированное	175–225	0,052–0,064
сварочное, тщательно полированное	40–250	0,28
полированное	425–1020	0,144–0,377
свежеобработанное наждаком	20	0,242
окисленное гладкое	125–525	0,78–0,82
литое необработанное	925–1115	0,87–0,95
Стальное литье полированное	770–1040	0,52–0,56
Сталь:		
листовая шлифованная	940–1110	0,52–0,61
окисленная при 600 °С	200–600	0,79–0,69
листовая с плотным блестящим слоем окиси	25	0,82
окисленная шероховатая	40–370	0,94–0,97
мягкая расплавленная	1600–1800	0,28
Чугун:		
полированный	200	0,21
обточенный	830–990	0,60–0,70
окисленный при 600 °С	200–600	0,64–0,78
шероховатый, сильно окисленный	40–250	0,95
расплавленный	1300–1400	0,29
Золото, тщательно полированное	225–625	0,018–0,035

Продолжение табл. П.1.13

Материал и характер поверхности	Температура * <sup>2</sup> , °С	ε * <sup>1</sup>
Латунь тщательно полированная состава, % (вес.):		
73,2% Cu, 26,7% Zn	245–355	0,028–0,031
62,4% Cu, 36,8% Zn, 0,4% Pb, 0,3% Al	255–375	0,039–0,037
82,9% Cu, 17,0% Zn	275	0,030
прокатанная с естественной поверхностью	22	0,06
прокатанная, тертая грубым наждаком	22	0,20
тусклая	50–350	0,22
окисленная при нагреве до 600 °С	200–600	0,61–0,59
Медь:		
тщательно полированная электролитная	80	0,018
полированная	115	0,023
шабрена до блеска, но не зеркальная	22	0,072
окисленная при нагреве до 600 °С	200–600	0,57–0,55
продолжительно нагревавшаяся, покрытая толстым слоем окиси	25	0,78
расплавленная	1075–1275	0,11–0,13
Молибденовая нить	725–2600	0,096–0,292
Никель:		
нанесенный гальваническим способом на полированное железо и затем полированный	23	0,045
технически чистый полированный	225–375	0,07–0,087
окисленный при нагреве до 600 °С	200–600	0,11
Никелевая проволока	185–1000	0,096–0,186
Хромоникель	52–1035	0,64–0,76
Олово, блестящее луженое листовое железо	25	0,043–0,064
Платина чистая полированная	225–625	0,054–0,104
Платиновая лента	925–1115	0,12–0,17
Платиновая нить	25–1230	0,036–0,192
Платиновая проволока	225–1375	0,073–0,182
Ртуть очень чистая	0–100	0,09–0,12
Свинец:		
чистый неокисленный	125–225	0,057–0,075
серный окисленный	24	0,281
окисленный при 200 °С	200	0,63
Серебро:		
полированное чистое	225–625	0,0198–0,0324
полированное	38–370	0,0221–0,0312

Продолжение табл. П.1.13

Материал и характер поверхности	Температура * <sup>2</sup> , °С	$\varepsilon$ * <sup>1</sup>
Хром	38–538	0,08–0,26
Цинк:		
торговый (99,1%) полированный	225–325	0,045–0,053
окисленный при нагреве до 400 °С	400	0,11
Оцинкованное листовое железо:		
очень блестящее	28	0,228
серое окисленное	24	0,276
<i>Огнеупорные, строительные, теплоизоляционные и другие материалы</i>		
Асбестовый картон	24	0,96
Асбестовая бумага	40–370	0,93–0,95
Асбошифер	20	0,96
Динасовый кирпич:		
неглазурованный шероховатый	1000	0,8
глазурованный шероховатый	1100	0,85
Кирпич:		
шамотный глазурованный	1100	0,75
магнезитовый (80% MgO, 9% Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	1500	0,39
силикатный (95% SiO <sub>2</sub> )	1230	0,66
силлиманитовый (33% SiO <sub>2</sub> , 64% Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	1500	0,29
красный шероховатый	20	0,93
шамот (55% SiO <sub>2</sub> , 41% Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	1230	0,59
Фарфор глазурованный	22	0,92
Гипс	20	0,8–0,9
Штукатурка шероховатая известковая	10–90	0,91
Мрамор сероватый полированный	22	0,93
Кварц плавленный шероховатый	20	0,93
Стекло гладкое	22	0,94
Бумага	20	0,8–0,9
Вода	0–100	0,95–0,96
Дерево строганное	20	0,8–0,9
Ламповая сажа, слой 0,075 мм	40–370	0,95
Обмазка из жидкого стекла с ламповой сажой	100–225	0,96–0,95

Материал и характер поверхности	Температура * <sup>2</sup> , °С	ε * <sup>1</sup>
Резина:		
твердая лощеная	23	0,95
мягкая серая шероховатая	24	0,86
Толь кровельный	20	0,93
Уголь очищенный (0,9 % золы)	125–625	0,81–0,79
Угольная нить	1040–1405	0,53
Эмаль белая, приплавленная к железу	19	0,9
Лак:		
белый эмалевый на железной шероховатой пластине	23	0,91
черный блестящий, распыленный по железу	25	0,88
черный матовый	40–95	0,96–0,98
белый	40–95	0,80–0,95
Шеллак:		
черный блестящий на луженом железе	21	0,82
черный матовый		
Масляные краски различных цветов	75–145	0,91
Алюминиевые краски: разной давности с переменным содержа- нием Al	100	0,96–0,86
после нагрева до 325 °С	100	0,27–0,67
Алюминиевый лак на шероховатой пластине	150–315	0,35
	20	0,39

\*<sup>1</sup> Степени черноты, приведенные в таблице, получены путем измерения яркости излучения в направлении нормали к поверхности тела.

\*<sup>2</sup> Две температуры и две степени черноты, указанные для некоторых материалов, означают, что первая степень черноты относится к первой температуре, а вторая – ко второй, при этом допускается линейная интерполяция.

## П.1.2. Физические свойства жидкостей

Таблица П.1.14

### Физические свойства трансформаторного масла

T, °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c_p$ , кДж/(кг·К)	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$\alpha \cdot 10^8$ , м <sup>2</sup> /с	$\mu \cdot 10^4$ , Па·с	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\beta \cdot 10^4$ , К <sup>-1</sup>	Pr
0	892,5	1,549	0,1123	8,14	629,8	70,5	6,80	866
10	886,4	1,620	0,1115	7,83	335,5	37,9	6,85	484
20	880,3	1,666	0,1106	7,56	198,2	22,5	6,90	298
30	874,2	1,729	0,1008	7,28	128,5	14,7	6,95	202
40	868,2	1,788	0,1090	7,03	89,4	10,3	7,00	146
50	862,1	1,846	0,1082	6,80	65,3	7,58	7,05	111
60	856,0	1,905	0,1072	6,58	49,5	5,78	7,10	87,8
70	850,0	1,964	0,1064	6,36	38,6	4,54	7,15	71,3
80	843,9	2,026	0,1056	6,17	30,8	3,66	7,20	59,3
90	837,8	2,085	0,1047	6,00	25,4	3,03	7,25	50,5
100	831,8	2,144	0,1038	5,83	21,3	2,56	7,30	43,9
110	825,7	2,202	0,1030	5,67	18,1	2,20	7,35	38,8
120	819,6	2,261	0,1022	5,50	15,7	1,92	7,40	34,9

Таблица П.1.15

### Физические свойства масла МС–20

T, °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c_p$ , кДж/(кг·К)	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$\alpha \cdot 10^8$ , м <sup>2</sup> /с	$\mu \cdot 10^4$ , Па·с	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\beta \cdot 10^4$ , К <sup>-1</sup>	Pr
-10	990,3	1,915	0,136	7,75	–	–	6,24	–
0	903,6	1,980	0,135	7,58	–	–	6,24	–
+10	897,9	2,010	0,135	7,44	–	–	6,31	–
20	892,3	2,043	0,134	7,30	10026	1125	6,35	15400
30	886,6	2,072	0,132	7,19	4670	526	6,38	7310
40	881,0	2,106	0,131	7,08	2433	276	6,42	3890
50	875,3	2,135	0,130	7,00	1334	153	6,46	2180
60	869,6	2,165	0,129	6,86	798,5	91,9	6,51	1340
70	864,0	2,198	0,128	6,75	498,3	58,4	6,55	865
80	858,3	2,227	0,127	6,67	336,5	39,2	6,60	588
90	852,7	2,261	0,126	6,56	234,4	27,5	6,64	420
100	847,0	2,290	0,126	6,44	171,7	20,3	6,69	315

Окончание табл. П.1.15

T, °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c_p$ , кДж/(кг·К)	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$a \cdot 10^8$ , м <sup>2</sup> /с	$\mu \cdot 10^4$ , Па·с	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\beta \cdot 10^4$ , К <sup>-1</sup>	Pr
110	841,3	2,320	0,124	6,36	132,4	15,7	6,73	247
120	835,7	2,353	0,123	6,25	101,0	12,1	6,77	193
130	830,0	2,382	0,122	6,17	79,76	9,61	6,82	156
140	824,4	2,420	0,121	6,08	61,80	7,50	6,87	123
150	818,7	2,445	0,120	6,00	53,17	6,50	6,92	108

Таблица П.1.16

**Физические свойства масла МК**

T, °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c_p$ , кДж/(кг·К)	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$a \cdot 10^8$ , м <sup>2</sup> /с	$\mu \cdot 10^4$ , Па·с	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\beta \cdot 10^4$ , К <sup>-1</sup>	Pr
10	911,0	1,645	0,1510	9,94	35414	3883	8,56	39000
20	903,	1,712	0,1485	9,58	18560	1514	8,64	15800
30	894,5	1,758	0,1461	9,28	6180	691,2	8,71	7450
40	887,5	1,804	0,1437	8,97	3031	342,0	8,79	3810
50	879,0	1,851	0,1413	8,69	1638	186,2	8,86	2140
60	871,5	1,897	0,1389	8,39	961,4	110,6	8,95	1320
70	864,0	1,943	0,1363	8,14	603,3	69,3	9,03	858
80	856,0	1,989	0,1340	7,89	399,3	46,6	9,12	591
90	848,2	2,035	0,1314	7,61	273,7	32,3	9,20	424
100	840,7	2,081	0,1290	7,33	202,1	24,0	9,28	327
110	838,0	2,127	0,1264	7,11	145,2	17,4	9,37	245
120	825,0	2,173	0,1240	6,92	110,4	13,4	9,46	193,5
130	817,0	2,219	0,1214	6,69	87,31	10,7	9,54	160,0
140	809,2	2,265	0,1188	6,53	70,34	8,70	9,65	133,3
150	801,6	2,311	0,1168	6,25	56,90	7,10	9,73	113,5

Таблица П.1.17

## Физические свойства ртути и некоторых расплавленных металлов

Металл	T, °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\sigma$ , кДж/(кг·К)	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$\alpha \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\nu \cdot 10^8$ , м <sup>2</sup> /с	Pr · 10 <sup>2</sup>
Ртуть Hg	20	13550	0,1390	7,90	4,36	11,4	2,72
$T_{\text{пл}} = -38,9$ °C;	100	13350	0,1373	8,95	4,89	9,4	1,92
$T_{\text{кип}} = 357$ °C;	150	13230	0,1373	9,65	5,30	8,6	1,62
$\gamma_{\text{пл}} = 11,72$	200	13120	0,1373	10,3	5,72	8,0	1,40
кДж/кг	300	12880	0,1373	11,7	6,64	7,1	1,07
Олово Sn	250	6980	0,255	34,1	19,2	27,0	1,41
$T_{\text{пл}} = 231,9$ °C;	300	6940	0,255	33,7	19,0	24,0	1,26
$T_{\text{кип}} = 2270$ °C;	400	6865	0,255	33,1	18,9	20,0	1,06
$\gamma_{\text{пл}} = 58,2$ кДж/кг	500	6790	0,255	32,6	18,8	17,3	0,92
Висмут Вi	300	10030	0,151	13,0	8,61	17,1	1,98
$T_{\text{пл}} = 271$ °C;	400	9910	0,151	14,4	9,72	14,2	1,46
$T_{\text{кип}} = 1477$ °C;	500	9785	0,151	15,8	10,8	12,2	1,13
$\gamma_{\text{пл}} = 50,2$ кДж/кг	600	9660	0,151	17,2	11,9	10,8	0,91
Литий Li	200	515	4,187	37,2	17,2	111,0	6,43
$T_{\text{пл}} = 179$ °C;	300	505	4,187	39,0	18,3	92,7	5,03
$T_{\text{кип}} = 1317$ °C;	400	495	4,187	41,9	20,3	81,7	4,04
$\gamma_{\text{пл}} = 661,5$ кДж/кг	500	484	4,187	45,3	22,3	73,4	3,28
Сплав 56,5% Вi+43,5% Рb	150	10550	0,146	9,8	6,39	28,9	4,50
$T_{\text{пл}} = 123,5$ °C;	200	10490	0,146	10,3	6,67	24,3	3,64
$T_{\text{кип}} = 1670$ °C	300	10360	0,146	11,4	7,50	18,7	2,50
	400	10240	0,146	12,6	8,33	15,7	1,87
	500	10120	0,146	14,0	9,44	13,6	1,44
Сплав 25% Na+75% К	100	852	1,143	23,2	23,9	60,7	2,51
$T_{\text{пл}} = -11$ °C;	200	828	1,072	24,5	27,6	45,2	1,64
$T_{\text{кип}} = 784$ °C	300	808	1,038	25,8	31,0	36,6	1,18
	400	778	1,005	27,1	34,7	30,8	0,89
	500	753	0,967	28,4	39,0	26,7	0,69
	600	729	0,934	29,6	43,6	23,7	0,54
	700	704	0,900	30,9	48,8	21,4	0,44
Натрий Na	150	916	1,356	84,9	68,3	59,4	0,87
$T_{\text{пл}} = 97,8$ °C;	200	903	1,327	81,4	67,8	50,6	0,75
$T_{\text{кип}} = 883$ °C;	300	878	1,281	70,9	63,0	39,4	0,63
$\gamma_{\text{пл}} = 113,26$	400	854	1,273	63,9	58,9	33,0	0,56
кДж/кг	500	829	1,273	57,0	54,2	28,9	0,53

Таблица П.1.18

## Физические свойства масла АМТ-300

T, °C	$\rho_{\text{кип}}$ , кПа	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$h'$ , кДж/кг	$c_p$ , кДж/(кг·К)	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	Pr
20	–	959	0,120	31,2	1,60	159	2030
40	–	948	0,119	64,0	1,68	44,6	596
60	–	937	0,117	96,5	1,73	16,8	233
80	–	925	0,115	134,5	1,81	8,46	123
100	–	913	0,114	170,0	1,87	5,17	77,6
120	–	901	0,112	208,2	1,94	4,44	53,8
140	0,9	889	0,111	248,0	2,01	2,47	39,7
160	1,3	879	0,108	288,0	2,08	1,77	29,8
180	1,8	863	0,106	330,0	2,14	1,31	22,9
200	2,8	849	0,104	374,0	2,22	1,09	19,9
220	4,2	835	0,102	418,0	2,28	0,914	16,5
240	6,5	822	0,100	462,0	2,34	0,775	15,0
260	10,2	808	0,099	510,0	2,42	0,663	13,1
280	15,8	794	0,095	556,0	2,48	0,569	11,8
300	24,8	781	0,093	612,0	2,53	0,507	10,8
320	30,9	767	0,091	672,0	2,62	0,465	10,1
340	66,6	753	0,088	715,0	2,68	0,406	9,3
360	90,3	740	0,086	770,0	2,73	0,359	8,5

Таблица П.1.19

## Физические свойства жидкого аммиака в состоянии насыщения

T, °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c_p$ , кДж/(кг·К)	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\beta \cdot 10^4$ , К <sup>-1</sup>	Pr
–40	690,0	4,442	0,629	–	17,28	1,95
–30	677,7	4,47	0,608	0,355	18,32	1,77
–20	665,0	4,410	0,585	0,304	19,32	1,56
–10	652,0	4,549	0,563	0,264	20,25	1,38
0	638,6	4,594	0,540	0,245	21,12	1,33
10	624,7	4,646	0,518	0,234	22,54	1,31
20	610,3	4,706	0,494	0,227	23,86	1,32
30	595,2	4,777	0,472	0,222	25,66	1,335
40	579,5	4,860	0,449	0,216	33,14	1,33

Таблица П.1.20

## Физические свойства дифенильной смеси

T, °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c_p$ , кДж/(кг·К)	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$\nu$ , м <sup>2</sup> /с	Pr
20	1060	1,591	0,137	4,11	50,0
30	1052	1,633	0,135	3,19	40,0
40	1044	1,675	0,134	2,51	33,0
50	1036	1,675	0,133	2,07	27,0
60	1028	1,717	0,131	1,73	23,0
70	1020	1,759	0,129	1,49	20,5
80	1012	1,800	0,128	1,29	18,5
90	1003	1,842	0,127	1,14	16,5
100	995	1,884	0,126	1,01	15,0
110	987	1,926	0,123	0,907	14,0
120	978	1,968	0,122	0,822	13,0
130	970	2,010	0,121	0,746	12,0
140	961	2,052	0,120	0,686	11,3
150	953	2,135	0,119	0,633	10,9
160	945	2,177	0,116	0,574	10,3
170	937	2,219	0,115	0,544	9,8
180	928	2,261	0,114	0,508	9,4
190	920	2,303	0,113	0,476	9,0
200	912	2,345	0,110	0,446	8,6
210	904	2,387	0,109	0,421	8,3

Таблица П.1.21

## Некоторые физические параметры жидкостей

Наименование	T, °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\alpha_T \cdot 10^5$ , 1/К	$c$ , кДж/(кг·К)	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$\mu \cdot 10$ , Па·с
Азотная кислота	20	1512	–	1,720	–	–
Анилин	0	1037	85	2,020	0,186	10,2
Ацетон	0	813	–	2,114	0,174	0,395
Бензин	0	900	–	1,800	0,145	–
Бензол	0	900	124	1,670	0,15	0,76(10)*
Вода дистиллированная	4	1000	15	4,187	0,55	–
Глицерин безводный	0	1260	53	2,430	0,277	12100
Касторовое масло	0	–	–	–	0,184	2440(10)*
Ксилол	0	880	–	1,72(20)*	0,137	–
Керосин	0	850	–	2,430	0,121	–
Льянное вареное масло	15	940	–	–	–	–
Машинное масло	–	–	–	1,670	–	–
Мазут	32	–	–	–	0,118	–
Медный купорос (15% CuSO <sub>4</sub> ·5H <sub>2</sub> O)	15	1100	–	–	–	–

Окончание табл. П.1.21

Наименование	T, °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\alpha_t \cdot 10^5$ , 1/K	$c_p$ , кДж/ (кг·K)	$\lambda$ , Вт/(м·K)	$\mu \cdot 10$ , Па·с
Минеральное смазочное масло	20	890–930	–	0,662	0,104	–
Едкий натр (66% NaOH)	15	1700	–	–	–	–
Нефтяное масло	20	890	–	2,430	0,104	–
Ртуть чистая	0	13600	–	0,138	8,14–10,5	–
Спирт бутиловый	0	810	–	–	–	5,19
Спирт изопропиловый	0	–	–	–	–	4,60
Спирт метиловый	0	810	122	2,470	0,214	0,817
Спирт этиловый	0	806	110	2,303	0,188	1,78
Серная кислота	20	1834	57	1,386	–	–
7,5%-ная H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	15	1050	–	–	0,391	–
87%-ная H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	15	1800	–	–	0,372	–
Сернистая кислота сгу- щенная	–20	1490	–	1,339	–	–
Смоляное масло	15	960	–	–	–	–
Соляная кислота	20	–	–	3,098	–	–
10%-ная HCl	15	1050	–	–	–	–
Смола	80	1200	–	–	0,139	–
Скипидар	0	–	94	1,716	0,127(15)*	–
Уксусная кислота	0	1049	–	2,135	0,177	1,24
Эфир	30	–	163	2,261	0,139	–

\* Примечание: в скобках указана температура

### П.1.3. Физические свойства газов

Таблица П.1.22

Физические свойства сухого воздуха ( $B = 1,01 \cdot 10^5$  Па)

T, °C	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c_p$ , кДж/(кг·К)	$\lambda \cdot 10^2$ , Вт/(м·К)	$\mu \cdot 10^6$ , Па·с	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$a \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	Pr
-50	1,584	1,013	2,04	14,6	9,23	12,7	0,728
-40	1,515	1,013	2,12	15,2	10,04	13,8	0,728
-30	1,453	1,013	2,20	15,7	10,80	14,9	0,723
-20	1,395	1,009	2,28	16,2	12,79	16,2	0,716
-10	1,342	1,009	2,36	16,7	12,43	17,4	0,712
0	1,293	1,005	2,44	17,2	13,28	18,8	0,707
10	1,247	1,005	2,51	17,6	14,16	20,0	0,705
20	1,205	1,005	2,59	18,1	15,06	21,4	0,703
30	1,165	1,005	2,67	18,6	16,00	22,9	0,701
40	1,128	1,005	2,76	19,1	16,96	24,3	0,699
50	1,093	1,005	2,83	19,6	17,95	25,7	0,698
60	1,060	1,005	2,90	20,1	18,97	26,2	0,696
70	1,029	1,009	2,96	20,6	20,02	28,6	0,694
80	1,000	1,009	3,05	21,1	21,09	30,2	0,692
90	0,972	1,009	3,13	21,5	22,10	31,9	0,690
100	0,946	1,009	3,21	21,9	23,13	33,6	0,688
120	0,898	1,009	3,34	22,8	25,45	36,8	0,686
140	0,854	1,013	3,49	23,7	27,80	40,3	0,684
160	0,815	1,017	3,64	24,5	30,09	43,9	0,682
180	0,779	1,022	3,78	25,3	32,49	47,5	0,681
200	0,746	1,026	3,93	26,0	34,85	51,4	0,680
250	0,674	1,038	4,27	27,4	40,61	61,0	0,677
300	0,615	1,047	4,60	29,7	48,33	71,6	0,674
350	0,566	1,059	4,91	31,4	55,46	81,9	0,676
400	0,524	1,068	5,21	33,0	63,09	93,1	0,678

Окончание табл. П.1.22

$T, ^\circ\text{C}$	$\rho,$ кг/м <sup>3</sup>	$c_p,$ кДж/(кг·К)	$\lambda \cdot 10^2,$ Вт/(м·К)	$\mu \cdot 10^6,$ Па·с	$\nu \cdot 10^6,$ м <sup>2</sup> /с	$a \cdot 10^6,$ м <sup>2</sup> /с	Pr
500	0,456	1,093	5,74	36,2	79,38	115,3	0,687
600	0,404	1,114	6,22	39,1	96,89	138,3	0,699
700	0,362	1,135	6,71	41,8	115,4	163,4	0,706
800	0,329	1,156	7,18	44,3	134,8	188,8	0,713
900	0,301	1,172	7,63	46,7	155,1	216,2	0,717
1000	0,277	1,185	8,07	49,0	177,1	245,9	0,719
1100	0,257	1,197	8,50	51,2	199,3	276,2	0,722
1200	0,239	1,210	9,15	53,5	233,7	316,5	0,724

Таблица П.1.23

**Физические свойства дымовых газов**  
**( $B = 1,01 \cdot 10^5$  Па;  $p_{\text{CO}_2} = 0,13$ ;  $p_{\text{H}_2\text{O}} = 0,11$ ;  $p_{\text{N}_2} = 0,76$ )**

$T, ^\circ\text{C}$	$\rho,$ кг/м <sup>3</sup>	$c_p,$ кДж/(кг·К)	$\lambda \cdot 10^2,$ Вт/(м·К)	$a \cdot 10^6,$ м <sup>2</sup> /с	$\mu \cdot 10^6,$ Па·с	$\nu \cdot 10^6,$ м <sup>2</sup> /с	Pr
0	1,295	1,042	2,28	16,9	15,8	12,20	0,72
100	0,950	1,068	3,13	30,8	20,4	21,54	0,69
200	0,748	1,097	4,01	48,9	24,5	32,80	0,67
300	0,617	1,122	4,84	69,9	28,2	45,81	0,65
400	0,525	1,151	5,70	94,3	31,7	60,38	0,64
500	0,457	1,185	6,56	121,1	34,8	76,30	0,63
600	0,405	1,214	7,42	150,9	37,9	93,61	0,62
700	0,363	1,239	8,27	183,8	40,7	112,1	0,61
800	0,330	1,264	9,15	219,7	43,4	131,8	0,60
900	0,301	1,290	10,0	258,0	45,9	152,5	0,59
1000	0,275	1,306	10,90	303,4	48,4	174,3	0,58
1100	0,257	1,323	11,75	345,5	50,7	197,1	0,57
1200	0,240	1,340	12,62	392,4	53,0	221,0	0,56

## П.1.4. Физические свойства воды и водяного пара

Таблица П.1.24

### Физические свойства воды при атмосферном давлении

T, °C	$p \cdot 10^{-5}$ , Па	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	h, кДж/ кг	$c_p$ , кДж/ (кг·К)	$\lambda \cdot 10^2$ , Вт/ (м·К)	$a \cdot 10^8$ , м <sup>2</sup> /с	$\mu \cdot 10^6$ , Па·с	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\beta \cdot 10^4$ , К <sup>-1</sup>	$\sigma \cdot 10^4$ , Н/м	Pr
0	1,013	999,9	0	4,212	55,1	13,1	1789	1,789	-0,63	756,4	13,5
10	1,013	999,7	42,04	4,191	57,4	13,7	1306	1,306	0,7	741,6	9,52
20	1,013	998,2	83,91	4,183	59,9	14,3	1004	1,006	1,82	726,9	7,02
30	1,013	995,7	125,7	4,174	61,8	14,9	801,5	0,805	3,21	712,2	5,42
40	1,013	992,2	167,5	4,174	63,5	15,3	653,3	0,659	3,87	696,5	4,31
50	1,013	988,1	209,3	4,174	64,8	15,7	549,4	0,556	4,49	676,9	3,54
60	1,013	983,2	251,1	4,179	65,9	16,0	469,9	0,478	5,11	662,2	2,93
70	1,013	977,8	293,0	4,187	66,8	16,3	406,1	0,415	5,70	643,5	2,55
80	1,013	971,8	335,0	4,195	67,4	16,6	355,1	0,365	6,32	625,9	2,21
90	1,013	965,3	377,0	4,208	68,0	16,8	314,9	0,326	6,95	607,2	1,95

Таблица П.1.25

### Зависимость температуры кипения воды (T<sub>кип</sub>) и теплоты парообразования (r) от давления (p)

$p \cdot 10^{-5}$ , Па	T <sub>кип</sub> , °C	r, кДж/кг	$p \cdot 10^{-5}$ , Па	T <sub>кип</sub> , °C	r, кДж/кг
0,0123	10	2477,4	21	214,84	1878,4
0,0234	20	2453,8	22	217,24	1868,2
0,0424	30	2430,2	23	219,55	1858,2
0,0737	40	2406,5	24	221,77	1848,5
0,1234	50	2382,5	25	223,93	1838,8
1	99,63	2258,2	26	226,03	1829,5
2	120,23	2202,2	27	228,06	1820,3
3	133,54	2164,1	28	230,04	1811,2
4	143,62	2133,8	29	231,96	1802,3
5	151,84	2108,4	30	233,83	1793,5
6	158,84	2086,0	32	237,44	1776,3
7	164,96	2065,8	34	240,88	1759,7
8	170,42	2047,5	36	244,16	1743,4
9	175,35	2030,4	38	247,31	1727,5
10	179,88	2014,4	40	250,33	1711,9
11	184,05	1999,3	42	253,24	1696,7

Продолжение табл. П.1.25

$p \cdot 10^{-5}$ , Па	$T_{кип}$ , °C	$g$ , кДж/кг	$p \cdot 10^{-5}$ , Па	$T_{кип}$ , °C	$g$ , кДж/кг
12	187,95	1985,0	44	256,05	1681,7
13	191,60	1971,3	46	258,75	1667,0
14	195,04	1958,3	48	261,37	1652,5
15	198,28	1945,7	50	263,91	1638,2
16	201,36	1933,6	52	266,38	1624,1
17	204,30	1922,0	54	268,77	1610,2
18	207,10	1910,5	56	271,10	1596,4
19	209,78	1899,6	58	273,36	1582,8
20	212,37	1888,8	60	275,56	1569,4
62	277,71	1556,0	146	339,96	1026,4
64	279,80	1542,8	148	341,04	1012,8
66	281,85	1529,6	150	342,11	999,4
68	283,85	1516,6	152	343,18	986,1
70	285,80	1503,7	154	344,23	972,5
72	287,71	1490,7	156	345,27	958,9
74	289,58	1478,1	158	346,30	945,1
76	291,41	1465,3	160	347,32	931,2
78	293,22	1452,6	162	348,33	917,2
80	294,98	1440,0	164	349,32	903,0
82	296,71	1427,5	166	350,31	888,6
84	298,40	1414,9	168	351,29	874,0
86	300,07	1402,5	170	352,26	859,2
88	301,71	1390,0	172	353,21	844,2
90	303,32	1377,6	174	354,17	828,8
92	304,90	1365,3	176	355,11	813,3
94	306,45	1352,9	178	356,04	797,3
96	307,98	1340,5	180	356,96	781,0
98	309,49	1328,1	182	357,87	764,2
100	310,96	1315,8	184	358,78	747,1
102	312,42	1303,5	186	359,67	729,3
104	313,86	1291,3	188	360,56	710,9
106	315,28	1278,8	190	361,44	691,9
108	316,67	1266,6	192	362,31	672,1
110	318,04	1254,2	194	363,17	651,6
112	319,39	1241,9	196	364,02	630,3
114	320,73	1229,4	198	364,87	608,2

$p \cdot 10^{-5}$ , Па	$T_{\text{кип}}, ^\circ\text{C}$	$g$ , кДж/кг	$p \cdot 10^{-5}$ , Па	$T_{\text{кип}}, ^\circ\text{C}$	$g$ , кДж/кг
116	322,05	1217,0	200	365,71	585,0
118	323,35	1204,6	202	366,54	560,8
120	324,63	1192,2	204	367,37	535,4
122	325,90	1179,7	206	368,18	508,3
124	327,15	1167,2	208	368,99	479,3
126	328,39	1154,7	210	369,79	448,0
128	329,61	1142,1	212	370,58	413,7
130	330,81	1129,4	214	371,4	375,1
132	332,00	1116,7	216	372,2	328,2
134	333,18	1104,1	218	372,9	270,6
136	334,34	1091,3	220	373,7	184,8
138	335,49	1078,5	Критическое	Критическое	Критическое
140	336,63	1065,5	состояние	состояние	состояние
142	337,75	1052,5	221,29	374,15	—
144	338,86	1039,5			

**Таблица П.1.26**  
**Физические свойства водяного пара на линии насыщения**

$T$ , $^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-5}$ , Па	$\rho''$ , кг/м <sup>3</sup>	$h''$ , кДж/кг	$g$ , кДж/кг	$c_p$ , кДж/ (кг·К)	$\lambda \cdot 10^2$ , Вт/ (м·К)	$a \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\mu \cdot 10^6$ , Па·с	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	Pr
0,01	0,0061	0,00485	2501	2500	1,861	1,697	1888	9,156	1888	1,00
10	0,0123	0,00939	2519,4	2477	1,869	1,770	1011	9,493	1011	1,00
20	0,0234	0,01729	2537,7	2453	1,877	1,824	563,7	9,746	563,7	1,00
30	0,0424	0,03037	2555,9	2430	1,885	1,883	328,9	9,989	328,9	1,00
40	0,0738	0,05117	2574	2406	1,895	1,953	200,7	10,270	200,7	1,00
50	0,1233	0,08303	2591,8	2382	1,907	2,034	128,8	10,586	127,5	0,99
60	0,1992	0,1302	2609,5	2358	1,923	2,122	84,70	10,921	83,88	0,99
70	0,3116	0,1981	2626,8	2333	1,942	2,214	57,48	11,272	56,90	0,99
80	0,4736	0,2932	2643,8	2309	1,967	2,309	40,03	11,620	39,63	0,99
90	0,7011	0,4232	2660,3	2283	1,997	2,407	28,55	11,960	28,26	0,99
100	1,013	0,598	2676,3	2256,8	2,135	2,372	18,58	11,97	20,02	1,08
110	1,43	0,826	2691,8	2230,0	2,177	2,489	13,83	12,46	15,07	1,09
120	1,98	1,121	2706,6	2202,8	2,206	2,593	10,50	12,85	11,46	1,09
130	2,7	1,496	2720,7	2174,3	2,257	2,686	7,972	13,24	8,85	1,11

Окончание табл. П.1.26

T, °C	$p \cdot 10^{-5}$ , Па	$\rho''$ , кг/м <sup>3</sup>	$h''$ , кДж/кг	$g$ , кДж/кг	$c_p$ , кДж/(кг·К)	$\lambda \cdot 10^2$ , Вт/(м·К)	$a \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\mu \cdot 10^6$ , Па·с	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	Pr
140	3,61	1,966	2734	2145,0	2,315	2,791	6,130	13,54	6,86	1,12
150	4,76	2,547	2746,3	2114,4	2,395	2,884	4,728	13,93	5,47	1,16
160	6,18	3,258	2757,7	2082,6	2,479	3,012	3,722	14,32	4,39	1,18
170	7,92	4,122	2768	2049,5	2,583	3,128	2,939	14,72	3,57	1,21
180	10,03	5,157	2777,1	2015,2	2,709	3,268	2,339	15,11	2,93	1,25
190	12,55	6,394	2784,9	1978,8	2,856	3,419	1,872	15,60	2,44	1,30
200	15,55	7,862	2791,4	1940,7	3,023	3,547	1,492	15,99	2,03	1,36
210	19,08	9,588	2796,4	1900,5	3,199	3,722	1,214	16,38	1,71	1,41
220	23,20	11,62	2799,9	1857,8	3,408	3,896	0,983	16,87	1,45	1,47
230	27,98	13,99	2801,7	1813,0	3,634	4,094	0,806	17,36	1,24	1,54
240	33,48	16,76	2801,6	1765,6	3,881	4,291	0,658	17,76	1,06	1,61
250	39,78	19,98	2799,5	1715,8	4,158	4,512	0,544	18,25	0,913	1,68
260	46,94	23,72	2795,2	1661,4	4,468	4,803	0,453	18,84	0,794	1,75
270	55,05	28,09	2788,3	1604,4	4,815	5,106	0,378	19,32	0,688	1,82
280	64,19	33,19	2778,6	1542,9	5,234	5,489	0,317	19,91	0,600	1,90
290	74,45	39,15	2765,4	1476,3	5,694	5,827	0,261	20,60	0,526	2,01
300	85,92	46,21	2748,4	1404,3	6,280	6,268	0,216	21,29	0,461	2,13
310	98,70	54,58	2726,8	1325,2	7,118	6,838	0,176	21,97	0,403	2,29
320	112,9	64,72	2699,6	1238,1	8,206	7,513	0,141	22,86	0,353	2,50
330	128,65	77,10	2665,5	1139,7	9,880	8,257	0,108	23,94	0,310	2,86
340	146,08	92,76	2622,3	1027,1	12,35	9,304	0,0811	25,21	0,272	3,35
350	165,37	113,6	2566,1	893,1	16,24	10,70	0,0580	26,58	0,234	4,03
360	186,74	144,0	2485,7	719,7	23,03	12,79	0,0386	29,14	0,202	5,23
370	210,53	203,0	2335,7	438,4	56,52	17,10	0,0150	33,75	0,166	11,1

Таблица П.1.27

## Физические свойства воды на линии насыщения

T, °C	$p \cdot 10^{-5}$ , Па	$\rho'$ , кг/м <sup>3</sup>	$h'$ , кДж/кг	$c_p$ , кДж/(кг·К)	$\lambda \cdot 10^2$ , Вт/(м·К)	$a \cdot 10^8$ , м <sup>2</sup> /с	$\mu \cdot 10^6$ , Па·с	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\beta \cdot 10^4$ , К <sup>-1</sup>	$\sigma \cdot 10^4$ , Н/м	Pr
100	1,0133	958,4	419,1	4,220	68,3	16,9	282,5	0,295	7,52	588,6	1,75
110	1,4326	951,0	461,4	4,233	68,5	17,0	259,0	0,272	8,08	569,0	1,60
120	1,9854	943,1	503,7	4,250	68,6	17,1	237,4	0,252	8,64	548,4	1,74
130	2,7012	934,8	546,4	4,266	68,6	17,2	217,8	0,233	9,19	528,8	1,36
140	3,6136	926,1	589,1	4,287	68,5	17,2	201,1	0,217	9,72	507,2	1,26

Окончание табл. П.1.27

T, °C	$p \cdot 10^{-5}$ , Па	$\rho'$ , кг/м <sup>3</sup>	$h'$ , кДж/кг	$c_p$ , кДж/ (кг·К)	$\lambda \cdot 10^2$ , Вт/ (м·К)	$a \cdot 10^8$ , м <sup>2</sup> /с	$\mu \cdot 10^6$ , Па·с	$\nu \cdot 10^6$ , м <sup>2</sup> /с	$\beta \cdot 10^4$ , К <sup>-1</sup>	$\sigma \cdot 10^4$ , Н/м	Pr
150	4,7597	917,0	632,2	4,313	68,4	17,3	186,4	0,203	10,3	486,6	1,17
160	6,1804	907,4	675,4	4,346	68,3	17,3	173,6	0,191	10,7	466,0	1,10
170	7,9202	897,3	719,3	4,380	67,9	17,3	162,8	0,181	11,3	443,4	1,05
180	10,027	886,9	763,3	4,417	67,4	17,2	153,0	0,173	11,9	422,8	1,00
190	12,552	876,0	807,8	4,459	67,0	17,1	144,2	0,165	12,6	400,2	0,96
200	15,551	863,0	852,5	4,505	66,3	17,0	136,4	0,158	13,3	376,7	0,93
210	19,079	852,8	897,7	4,555	65,5	16,9	130,5	0,153	14,1	354,1	0,91
220	23,201	840,3	943,7	4,614	64,5	16,6	124,6	0,148	14,8	331,6	0,89
230	27,979	827,3	990,2	4,681	63,7	16,4	119,7	0,145	15,9	310,0	0,88
240	33,480	813,6	1037,5	4,766	62,8	16,2	114,8	0,141	16,8	285,5	0,87
250	39,776	799,0	1085,7	4,844	61,8	15,9	109,9	0,137	18,1	261,9	0,86
260	46,940	784,0	1135,1	4,949	60,5	15,6	105,9	0,135	19,1	237,4	0,87
270	55,051	767,9	1185,3	5,070	59,0	15,1	102,0	0,133	21,6	214,8	0,88
280	64,191	750,7	1236,8	5,230	57,4	14,6	98,1	0,131	23,7	191,3	0,90
290	74,448	732,3	1290,0	5,485	55,8	13,9	94,2	0,129	26,2	168,7	0,93
300	85,917	512,5	1344,9	5,736	54,0	13,2	91,2	0,128	29,2	144,2	0,97
310	98,697	691,1	1402,2	6,071	52,3	12,5	88,3	0,128	32,9	120,7	1,03
320	112,90	667,1	1462,1	6,574	50,6	11,5	85,3	0,128	38,2	98,10	1,11
330	128,65	640,2	1526,2	7,244	48,4	10,4	81,4	0,127	43,3	76,71	1,22
340	146,08	610,1	1594,8	8,165	45,7	9,17	77,5	0,127	53,4	56,70	1,39
350	165,37	574,4	1671,4	9,504	43,0	7,88	72,6	0,126	66,8	38,16	1,60
360	186,74	528,0	1761,5	13,984	39,5	5,36	66,7	0,126	109	20,21	2,35
370	210,53	450,5	1892,5	40,321	33,7	1,86	56,9	0,126	264	4,709	6,79

**П.2. Функции Бесселя и табулированные коэффициенты  
для расчета температурного поля в телах простой формы [21]**

Таблица П.2.1

**Функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков**

u	$J_0(u)$	$J_1(u)$		u	$J_0(u)$	$J_1(u)$		u	$J_0(u)$	$J_1(u)$
0,0	1,0000	0,0000		5,0	-0,1776	-0,3276		10,0	-0,2459	0,0435
0,1	0,9975	0,0499		5,1	-0,1443	-0,3371		10,1	-0,2490	0,0184
0,2	0,9900	0,0995		5,2	-0,1103	-0,3432		10,2	-0,2496	0,0066
0,3	0,9776	0,1483		5,3	-0,0758	-0,3460		10,3	-0,2477	-0,0313
0,4	0,9604	0,1960		5,4	-0,0412	-0,3453		10,4	-0,2434	-0,0555
0,5	0,9385	0,2423		5,5	-0,0068	-0,3414		10,5	-0,2366	-0,0788
0,6	0,9120	0,2867		5,6	0,0270	-0,3343		10,6	-0,2276	-0,1012
0,7	0,8812	0,3290		5,7	0,0599	-0,3241		10,7	-0,2164	-0,1224
0,8	0,8463	0,3688		5,8	0,0917	-0,3110		10,8	-0,2032	-0,1422
0,9	0,8075	0,4059		5,9	0,1220	-0,2951		10,9	-0,1881	-0,1604
1,0	0,7652	0,4400		6,0	0,1506	-0,2767		11,0	-0,1712	-0,1768
1,1	0,7196	0,4709		6,1	0,1773	-0,2559		11,1	-0,1528	-0,1913
1,2	0,6711	0,4983		6,2	0,2017	-0,2329		11,2	-0,1330	-0,2038
1,3	0,6201	0,5220		6,3	0,2238	-0,2081		11,3	-0,1121	-0,2143
1,4	0,5669	0,5419		6,4	0,2433	-0,1816		11,4	-0,0902	-0,2224
1,5	0,5118	0,5579		6,5	0,2601	-0,1538		11,5	-0,0677	-0,2284
1,6	0,4554	0,5699		6,6	0,2740	-0,1250		11,6	-0,0446	-0,2320
1,7	0,3980	0,5778		6,7	0,2851	-0,0953		11,7	-0,0213	-0,2333
1,8	0,3400	0,5815		6,8	0,2931	-0,0652		11,8	0,0020	-0,2323
1,9	0,2818	0,5812		6,9	0,2981	-0,0349		11,9	0,0250	-0,2290
2,0	0,2239	0,5767		7,0	0,3001	-0,0047		12,0	0,0477	-0,2234
2,1	0,1666	0,5683		7,1	0,2991	0,0252		12,1	0,0697	-0,2158
2,2	0,1104	0,5560		7,2	0,2951	0,0543		12,2	0,0908	-0,2060
2,3	0,0555	0,5399		7,3	0,2882	0,0826		12,3	0,1108	-0,1943
2,4	0,0025	0,5202		7,4	0,2786	0,1096		12,4	0,1296	-0,1807
2,5	-0,0484	0,4971		7,5	0,2663	0,1352		12,5	0,1469	-0,1655
2,6	-0,0968	0,4708		7,6	0,2516	0,1592		12,6	0,1626	-0,1487
2,7	-0,1424	0,4416		7,7	0,2346	0,1813		12,7	0,1766	-0,1307
2,8	-0,1850	0,4097		7,8	0,2154	0,2014		12,8	0,1887	-0,1114
2,9	-0,2243	0,3754		7,9	0,1944	0,2192		12,9	0,1988	-0,0912
3,0	-0,2600	0,3391		8,0	0,1716	0,2346		13,0	0,2069	-0,0703
3,1	-0,2921	0,3009		8,1	0,1475	0,2476		13,1	0,2129	-0,0488
3,2	-0,3202	0,2613		8,2	0,1220	0,2580		13,2	0,2167	-0,0271
3,3	-0,3443	0,2207		8,3	0,0960	0,2657		13,3	0,2183	-0,0052
3,4	-0,3643	0,1792		8,4	0,0692	0,2708		13,4	0,2177	0,0166
3,5	-0,3801	0,1374		8,5	0,0419	0,2731		13,5	0,2150	0,0380

Окончание табл. П.2.1

u	$J_0(u)$	$J_1(u)$		u	$J_0(u)$	$J_1(u)$		u	$J_0(u)$	$J_1(u)$
3,6	-0,3918	00955		8,6	0,0146	0,2728		13,6	0,2101	0,0590
3,7	-0,3992	0,0538		8,7	-0,0125	0,2697		13,7	0,2032	0,0791
3,8	-0,4026	0,0128		8,8	-0,0392	0,2641		13,8	0,1943	0,0984
3,9	-0,4018	-0,0272		8,9	-0,0652	0,2559		13,9	0,1836	0,1165
4,0	-0,3971	-0,0660		9,0	-0,0903	0,2453		14,0	0,1711	0,1334
4,1	-0,3887	-0,1033		9,1	-0,1142	0,2324		14,1	0,1570	0,1488
4,2	-0,3766	-0,1386		9,2	-0,1368	0,2174		14,2	0,1414	0,1626
4,3	-0,3610	-0,1719		9,3	-0,1577	0,2004		14,3	0,1245	0,1747
4,4	-0,3423	-0,2028		9,4	-0,1768	0,1816		14,4	0,1065	0,1850
4,5	-0,3205	-0,2311		9,5	-0,1939	0,1613		14,5	0,0875	0,1934
4,6	-0,2961	-0,2666		9,6	-0,2090	0,1395		14,6	0,0679	0,1989
4,7	-0,2693	-0,2791		9,7	-0,2218	0,1116		14,7	0,0476	0,2043
4,8	-0,2404	-0,2985		9,8	-0,2323	0,0928		14,8	0,0271	0,2066
4,9	-0,2097	-0,3147		9,9	-0,2403	0,0684		14,9	0,0064	0,2069
								15,0	-0,0142	0,2051

Таблица П.2.2

**Корни характеристического уравнения для неограниченной пластины**

$B_i$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\mu_5$	$\mu_6$
0,00	0,0000	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080
0,001	0,0316	3,1419	6,2833	9,4249	12,5665	15,7080
0,002	0,0447	3,1422	6,2835	9,4250	12,5665	15,7081
0,004	0,0632	3,1429	6,2838	9,4252	12,5667	15,7082
0,006	0,0774	3,1435	6,2841	9,4254	12,5668	15,7083
0,008	0,0893	3,1441	6,2845	9,4256	12,5670	15,7085
0,01	0,0998	3,1448	6,2848	9,4258	12,5672	15,7086
0,02	0,1410	3,1479	6,2864	9,4269	12,5680	15,7092
0,04	0,1987	3,1543	6,2895	9,4290	12,5696	15,7105
0,06	0,2425	3,1606	6,2927	9,4311	12,5711	15,7118
0,08	0,2791	3,1668	6,2959	9,4333	12,5727	15,7131
0,1	0,3111	3,1731	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143
0,2	0,4328	3,2039	6,3148	9,4459	12,5823	15,7207
0,3	0,5218	3,2341	6,3305	9,4565	12,5902	15,7270
0,4	0,5932	3,2636	6,3461	9,4670	12,5981	15,7334
0,5	0,6533	3,2923	6,3616	9,4775	12,6060	15,7397
0,6	0,7051	3,3204	6,3770	9,4879	12,6139	15,7460
0,7	0,7506	3,3477	6,3923	9,4983	12,6218	15,7524
0,8	0,7910	3,3744	6,4074	9,5087	12,6296	15,7587
0,9	0,8274	3,4003	6,4224	9,5190	12,6375	15,7650
1,0	0,8603	3,4256	6,4373	9,5293	12,6453	15,7713
1,5	0,9882	3,5422	6,5097	9,5801	12,6841	15,8026
2,0	1,0769	3,6436	6,5783	9,6296	12,7223	15,8336
3,0	1,1925	3,8088	6,7040	9,7240	12,7966	15,8945
4,0	1,2646	3,9352	6,8140	9,8119	12,8678	15,9536
5,0	1,3138	4,0336	6,9096	9,8928	12,9352	16,0107
6,0	1,3496	4,1116	6,9924	9,9667	12,9988	16,0654
7,0	1,3766	4,1746	7,0640	10,0339	13,0584	16,1177
8,0	1,3978	4,2264	7,1263	10,0949	13,1141	16,1675
9,0	1,4149	4,2694	7,1806	10,1502	13,1660	16,2147
10	1,4289	4,3058	7,2281	10,2003	13,2142	16,2594
15	1,4729	4,4255	7,3959	10,3898	13,4078	16,4474
20	1,4961	4,4915	7,4954	10,5117	13,5420	16,5864
30	1,5202	4,5615	7,6057	10,6543	13,7085	16,7691
40	1,5325	4,5979	7,6647	10,7334	13,8048	16,8794
50	1,5400	4,6202	7,7012	10,7832	13,8666	16,9519
60	1,5451	4,6353	7,7259	10,8172	13,9094	17,0026
80	1,5514	4,6543	7,7573	10,8606	13,9644	17,0686
100	1,5552	4,6658	7,7764	10,8871	13,9981	17,1093
$\infty$	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788

Таблица П.2.3

**Коэффициенты уравнений для расчета температуры в характерных  
точках неограниченной пластины при  $Fo \geq 0,3$**

$Bi$	$\mu_1$	$\mu_1^2$	$N_n$	$P_n$		$Bi$	$\mu_1$	$\mu_1^2$	$N_n$	$P_n$
0,00	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000		2,2	1,1052	1,2216	1,1864	0,5326
0,01	0,0998	0,0100	1,0017	0,9967		2,4	1,1306	1,2782	1,1934	0,5086
0,02	0,1409	0,0199	1,0033	0,9934		2,6	1,1533	1,3301	1,1997	0,4864
0,04	0,1987	0,0395	1,0066	0,9868		2,8	1,1738	1,3779	1,2052	0,4660
0,06	0,2425	0,0588	1,0098	0,9802		3,0	1,1925	1,4220	1,2102	0,4470
0,08	0,2791	0,0779	1,0130	0,9738		3,5	1,2323	1,5185	1,2206	0,4054
0,10	0,3111	0,0968	1,0161	0,9673		4,0	1,2646	1,5992	1,2287	0,3704
0,12	0,3396	0,1154	1,0192	0,9610		4,5	1,2913	1,6676	1,2351	0,3407
0,14	0,3657	0,1337	1,0222	0,9546		5,0	1,3138	1,7262	1,2402	0,3152
0,16	0,3896	0,1518	1,0252	0,9484		5,5	1,3330	1,7769	1,2444	0,2931
0,18	0,4119	0,1697	1,0282	0,9422		6,0	1,3496	1,8213	1,2479	0,2738
0,20	0,4328	0,1874	1,0311	0,9360		7,0	1,3766	1,8951	1,2532	0,2418
0,22	0,4525	0,2048	1,0340	0,9299		8,0	1,3978	1,9539	1,2570	0,2164
0,24	0,4711	0,2220	1,0368	0,9238		9,0	1,4149	2,0018	1,2598	0,1956
0,26	0,4888	0,2390	1,0396	0,9178		10	1,4289	2,0417	1,2620	0,1785
0,28	0,5057	0,2557	1,0423	0,9119		12	1,4505	2,1040	1,2650	0,1518
0,30	0,5218	0,2723	1,0450	0,9060		14	1,4664	2,1504	1,2669	0,1320
0,35	0,5592	0,3127	1,0517	0,8915		16	1,4786	2,1864	1,2683	0,1167
0,40	0,5932	0,3519	1,0580	0,8773		18	1,4883	2,2150	1,2692	0,1046
0,45	0,6244	0,3899	1,0642	0,8634		20	1,4961	2,2384	1,2699	0,0947
0,50	0,6533	0,4268	1,0701	0,8498		25	1,5105	2,2815	1,2710	0,0767
0,55	0,6801	0,4625	1,0759	0,8365		30	1,5202	2,3109	1,2717	0,0644
0,6	0,7051	0,4971	1,0814	0,8235		35	1,5272	2,3323	1,2721	0,0555
0,7	0,7506	0,5633	1,0918	0,7985		40	1,5325	2,3486	1,2723	0,0487
0,8	0,7910	0,6257	1,1016	0,7745		50	1,5400	2,3716	1,2727	0,0392
0,9	0,8274	0,6846	1,1107	0,7517		60	1,5451	2,3872	1,2728	0,0328
1,0	0,8603	0,7402	1,1191	0,7299		70	1,5487	2,3984	1,2729	0,0282
1,2	0,9178	0,8424	1,1344	0,6892		80	1,5514	2,4069	1,2730	0,0247
1,4	0,9665	0,9342	1,1477	0,6520		90	1,5535	2,4135	1,2731	0,0220
1,6	1,0084	1,0169	1,1593	0,6181		100	1,5552	2,4188	1,2731	0,0198
1,8	1,0449	1,0917	1,1695	0,5871		$\infty$	1,5708	2,4674	1,2732	0,0000
2,0	1,0769	1,1597	1,1785	0,5587						

Таблица П.2.4

## Корни характеристического уравнения для неограниченного цилиндра

$B_i$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\mu_5$	$\mu_6$
0,00	0,0000	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706
0,01	0,1412	3,8343	7,0170	10,1745	13,3244	16,4712
0,02	0,1995	3,8369	7,0184	10,1754	13,3252	16,4718
0,04	0,2814	3,8421	7,0213	10,1774	13,3267	16,4731
0,06	0,3438	3,8473	7,0241	10,1794	13,3282	16,4743
0,08	0,3960	3,8525	7,0270	10,1813	13,3297	16,4755
0,10	0,4417	3,8577	7,0298	10,1833	13,3312	16,4767
0,15	0,5376	3,8706	7,0369	10,1882	13,3349	16,4797
0,2	0,6170	3,8835	7,0440	10,1931	13,3387	16,4828
0,3	0,7465	3,9091	7,0582	10,2029	13,3462	16,4888
0,4	0,8516	3,9344	7,0723	10,2127	13,3537	16,4949
0,5	0,9408	3,9594	7,0864	10,2225	13,3611	16,5010
0,6	1,0184	3,9841	7,1004	10,2322	13,3686	16,5070
0,7	1,0873	4,0085	7,1143	10,2419	13,3761	16,5131
0,8	1,1490	4,0325	7,1282	10,2519	13,3835	16,5191
0,9	1,2048	4,0562	7,1421	10,2613	13,3910	16,5251
1,0	1,2558	4,0795	7,1558	10,2710	13,3984	16,5312
1,5	1,4569	4,1902	7,2233	10,3188	13,4353	16,5612
2,0	1,5994	4,2910	7,2884	10,3658	13,4719	16,5910
3,0	1,7887	4,4634	7,4103	10,4566	13,5434	16,6499
4,0	1,9081	4,6018	7,5201	10,5423	13,6125	16,7073
5,0	1,9898	4,7131	7,6177	10,6223	13,6786	16,7630
6,0	2,0490	4,8033	7,7039	10,6964	13,7414	16,8168
7,0	2,0937	4,8772	7,7797	10,7646	13,8008	16,8684
8,0	2,1286	4,9384	7,8464	10,8271	13,8566	16,9179
9,0	2,1566	4,9897	7,9051	10,8842	13,9090	16,9650
10	2,1795	5,0332	7,9569	10,9363	13,9580	17,0099
15	2,2509	5,1773	8,1422	11,1367	14,1576	17,2008
20	2,2880	5,2568	8,2534	11,2677	14,2983	17,3442
30	2,3261	5,3410	8,3771	11,4221	14,4748	17,5348
40	2,3455	5,3846	8,4432	11,5081	14,5774	17,6508
50	2,3572	5,4112	8,4840	11,5621	14,6433	17,7272
60	2,3651	5,4291	8,5116	11,5990	14,6889	17,7807
80	2,3750	5,4516	8,5466	11,6461	14,7475	17,8502
100	2,3809	5,4652	8,5678	11,6747	14,7834	17,8931
$\infty$	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711

Таблица П.2.5

**Коэффициенты уравнений для расчета температуры в характерных  
точках неограниченного цилиндра при  $Fo \geq 0,17$**

$Bi$	$\mu_1$	$\mu_1^2$	$N_{\mu}$	$P_{\mu}$		$Bi$	$\mu_1$	$\mu_1^2$	$N_{\mu}$	$P_{\mu}$
0,00	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000		2,2	1,6456	2,7079	1,3578	0,5829
0,01	0,1412	0,0199	1,0025	0,9975		2,4	1,6869	2,8457	1,3754	0,5578
0,02	0,1995	0,0398	1,0050	0,9950		2,6	1,7242	2,9728	1,3914	0,5343
0,04	0,2814	0,0792	1,0099	0,9900		2,8	1,7579	3,0904	1,4059	0,5123
0,06	0,3438	0,1182	1,0148	0,9851		3,0	1,7887	3,1993	1,4191	0,4918
0,08	0,3960	0,1568	1,0197	0,9801		3,5	1,8545	3,4391	1,4473	0,4462
0,10	0,4417	0,1951	1,0246	0,9752		4,0	1,9081	3,6408	1,4698	0,4073
0,12	0,4826	0,2329	1,0294	0,9703		4,5	1,9525	3,8122	1,4880	0,3740
0,14	0,5200	0,2704	1,0342	0,9654		5,0	1,9898	3,9594	1,5029	0,3453
0,16	0,5546	0,3075	1,0389	0,9606		5,5	2,0216	4,0869	1,5151	0,3204
0,18	0,5868	0,3443	1,0436	0,9557		6,0	2,0490	4,1984	1,5253	0,2985
0,20	0,6170	0,3807	1,0483	0,9509		7,0	2,0937	4,3837	1,5411	0,2623
0,22	0,6455	0,4167	1,0529	0,9461		8,0	2,1286	4,5311	1,5526	0,2335
0,24	0,6726	0,4523	1,0576	0,9413		9,0	2,1566	4,6510	1,5611	0,2102
0,26	0,6983	0,4876	1,0621	0,9365		10	2,1795	4,7502	1,5677	0,1909
0,28	0,7229	0,5226	1,0667	0,9318		12	2,2147	4,9048	1,5769	0,1612
0,30	0,7465	0,5572	1,0712	0,9271		14	2,2404	5,0196	1,5828	0,1393
0,35	0,8014	0,6422	1,0823	0,9153		16	2,2601	5,1080	1,5869	0,1226
0,40	0,8516	0,7252	1,0931	0,9038		18	2,2756	5,1781	1,5898	0,1094
0,45	0,8978	0,8061	1,1038	0,8923		20	2,2880	5,2352	1,5919	0,0987
0,50	0,9408	0,8850	1,1143	0,8810		25	2,3108	5,3398	1,5954	0,0793
0,55	0,9809	0,9621	1,1245	0,8699		30	2,3261	5,4109	1,5973	0,0663
0,60	1,0184	1,0372	1,1345	0,8588		35	2,3372	5,4625	1,5985	0,0569
0,70	1,0873	1,1821	1,1539	0,8373		40	2,3455	5,5015	1,5993	0,0498
0,80	1,1490	1,3201	1,1724	0,8163		50	2,3572	5,5566	1,6002	0,0399
0,90	1,2048	1,4516	1,1902	0,7959		60	2,3651	5,5935	1,6007	0,0333
1,0	1,2558	1,5770	1,2071	0,7761		70	2,3707	5,6202	1,6011	0,0286
1,2	1,3456	1,8106	1,2387	0,7383		80	2,3749	5,6403	1,6013	0,0250
1,4	1,4224	2,0233	1,2673	0,7029		90	2,3782	5,6560	1,6014	0,0222
1,6	1,4892	2,2176	1,2934	0,6698		100	2,3809	5,6686	1,6015	0,0200
1,8	1,5477	2,3953	1,3170	0,6388		$\infty$	2,4049	5,7833	1,6020	0,0000
2,0	1,5994	2,5582	1,3384	0,6099						

Таблица П.2.6

## Корни характеристического уравнения для шара

$B_i$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$\mu_5$	$\mu_6$
0,00	0,0000	4,4934	7,7253	10,9041	14,0662	17,2208
0,01	0,1730	4,4956	7,7265	10,9050	14,0669	17,2213
0,02	0,2445	4,4979	7,7278	10,9060	14,0676	17,2219
0,04	0,3450	4,5023	7,7304	10,9078	14,0690	17,2231
0,06	0,4217	4,5068	7,7330	10,9096	14,0705	17,2242
0,08	0,4860	4,5112	7,7356	10,9115	14,0719	17,2254
0,10	0,5423	4,5157	7,7382	10,9133	14,0733	17,2266
0,15	0,6609	4,5268	7,7447	10,9179	14,0769	17,2295
0,2	0,7593	4,5379	7,7511	10,9225	14,0804	17,2324
0,3	0,9208	4,5601	7,7641	10,9316	14,0875	17,2382
0,4	1,0528	4,5822	7,7770	10,9408	14,0946	17,2440
0,5	1,1656	4,6042	7,7899	10,9499	14,1017	17,2498
0,6	1,2644	4,6261	7,8028	10,9591	14,1088	17,2556
0,7	1,3525	4,6479	7,8156	10,9682	14,1159	17,2614
0,8	1,4320	4,6696	7,8284	10,9774	14,1230	17,2672
0,9	1,5044	4,6911	7,8412	10,9865	14,1301	17,2730
1,0	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788
1,5	1,8366	4,8158	7,9171	11,0409	14,1724	17,3076
2,0	2,0288	4,9132	7,9787	11,0856	14,2075	17,3364
2,5	2,1746	5,0037	8,0385	11,1296	14,2421	17,3649
3,0	2,2889	5,0870	8,0962	11,1727	14,2764	17,3932
4,0	2,4557	5,2329	8,2045	11,2560	14,3434	17,4490
5,0	2,5704	5,3540	8,3029	11,3349	14,4080	17,5034
6,0	2,6537	5,4544	8,3914	11,4086	14,4699	17,5562
7,0	2,7165	5,5378	8,4703	11,4773	14,5288	17,6072
8,0	2,7654	5,6078	8,5406	11,5408	14,5847	17,6567
9,0	2,8044	5,6669	8,6031	11,5994	14,6374	17,7032
10	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532	14,6870	17,7481
15	2,9349	5,8852	8,8605	11,8634	14,8917	17,9414
20	2,9857	5,9783	8,9831	12,0029	15,0384	18,0887
30	3,0372	6,0766	9,1201	12,1691	15,2245	18,2870
40	3,0632	6,1273	9,1933	12,2618	15,3334	18,4085
50	3,0788	6,1582	9,2384	12,3200	15,4034	18,4888
60	3,0893	6,1788	9,2690	12,3599	15,4518	18,5450
80	3,1023	6,2048	9,3075	12,4105	15,5141	18,6181
100	3,1102	6,2204	9,3308	12,4414	15,5521	18,6632
$\infty$	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496

Таблица П.2.7

Коэффициенты уравнений для расчета температуры в характерных  
точках шара при  $Fo \geq 0,12$

Bi	$\mu_1$	$\mu_1^2$	$N_{ш}$	$P_{ш}$		Bi	$\mu_1$	$\mu_1^2$	$N_{ш}$	$P_{ш}$
0,00	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000		2,2	2,0917	4,3750	1,5125	0,6272
0,01	0,1730	0,0299	1,0030	0,9980		2,4	2,1483	4,6154	1,5433	0,6019
0,02	0,2445	0,0598	1,0060	0,9960		2,6	2,1997	4,8385	1,5718	0,5779
0,04	0,3450	0,1190	1,0120	0,9920		2,8	2,2463	5,0460	1,5982	0,5552
0,06	0,4217	0,1779	1,0179	0,9880		3,0	2,2889	5,2392	1,6227	0,5338
0,08	0,4860	0,2362	1,0239	0,9840		3,5	2,3806	5,6675	1,6761	0,4855
0,10	0,5423	0,2941	1,0298	0,9801		4,0	2,4556	6,0302	1,7202	0,4437
0,12	0,5929	0,3515	1,0357	0,9761		4,5	2,5180	6,3401	1,7567	0,4074
0,14	0,6391	0,4084	1,0416	0,9721		5,0	2,5704	6,6071	1,7870	0,3758
0,16	0,6819	0,4649	1,0475	0,9682		5,5	2,6152	6,8390	1,8124	0,3482
0,18	0,7218	0,5210	1,0533	0,9642		6,0	2,6537	7,0419	1,8338	0,3240
0,20	0,7593	0,5765	1,0592	0,9603		7,0	2,7165	7,3792	1,8673	0,2835
0,22	0,7948	0,6317	1,0650	0,9563		8,0	2,7654	7,6472	1,8920	0,2514
0,24	0,8285	0,6864	1,0708	0,9524		9,0	2,8044	7,8648	1,9106	0,2254
0,26	0,8606	0,7406	1,0765	0,9485		10	2,8363	8,0446	1,9249	0,2040
0,28	0,8913	0,7945	1,0823	0,9446		12	2,8851	8,3237	1,9450	0,1710
0,30	0,9208	0,8478	1,0880	0,9407		14	2,9206	8,5299	1,9581	0,1470
0,35	0,9897	0,9794	1,1023	0,9309		16	2,9476	8,6881	1,9670	0,1287
0,40	1,0528	1,1084	1,1164	0,9213		18	2,9687	8,8132	1,9734	0,1144
0,45	1,1112	1,2347	1,1303	0,9116		20	2,9857	8,9145	1,9781	0,1029
0,50	1,1656	1,3585	1,1441	0,9021		25	3,0166	9,0996	1,9856	0,0821
0,55	1,2165	1,4798	1,1578	0,8926		30	3,0372	9,2248	1,9898	0,0682
0,60	1,2644	1,5987	1,1713	0,8832		35	3,0521	9,3151	1,9924	0,0584
0,70	1,3525	1,8293	1,1978	0,8646		40	3,0632	9,3833	1,9942	0,0510
0,80	1,4320	2,0507	1,2236	0,8462		50	3,0788	9,4793	1,9962	0,0407
0,90	1,5044	2,2633	1,2488	0,8282		60	3,0893	9,5436	1,9974	0,0338
1,0	1,5708	2,4674	1,2732	0,8106		70	3,0967	9,5898	1,9980	0,0289
1,2	1,6887	2,8516	1,3201	0,7763		80	3,1023	9,6245	1,9985	0,0253
1,4	1,7906	3,2062	1,3640	0,7435		90	3,1067	9,6516	1,9988	0,0224
1,6	1,8798	3,5335	1,4052	0,7121		100	3,1102	9,6733	1,9990	0,0202
1,8	1,9586	3,8360	1,4436	0,6823		$\infty$	3,1416	9,8696	2,0000	0,0000
2,0	2,0288	4,1159	1,4793	0,6540						

## СОДЕРЖАНИЕ ПЕРВОГО ТОМА

ПРЕДИСЛОВИЕ	9
ВВЕДЕНИЕ	11
ЧАСТЬ I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕПЛОМАССООБМЕНА. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА	15
ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕПЛОООБМЕНА	16
§ 1.1. Температурное поле. Изотермическая поверхность	16
§ 1.2. Градиент температурного поля	23
§ 1.3. Количество теплоты. Тепловой поток. Удельные тепловые потоки	24
§ 1.4. Элементарные способы передачи теплоты. Сложный теплообмен	32
§ 1.5. Расчет тепловых потоков в процессе теплообмена	34
§ 1.5.1. Теплопроводность	34
§ 1.5.2. Конвективный теплообмен	36
§ 1.5.3. Теплообмен излучением	37
§ 1.6. Теплоотдача	39
§ 1.7. Теплопередача	44
Контрольные вопросы <i>по материалам первой главы</i>	48
ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАССООБМЕНА	50
§ 2.1. Поле концентраций. Градиент концентрации	51
§ 2.2. Поток массы. Плотность потока массы	54
§ 2.3. Способы переноса массы. Расчет потока массы в процессе массообмена	55
§ 2.3.1. Диффузионный массоперенос	55
§ 2.3.2. Конвективный массоперенос	59
§ 2.4. Массоотдача	59
Контрольные вопросы <i>по материалам второй главы</i>	62

ГЛАВА 3. КЛАССИФИКАЦИЯ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОМАССОБМЕНА	63
§ 3.1. Классификация задач тепломассообмена	63
§ 3.2. Методы решения задач тепломассообмена	67
§ 3.2.1. Понятие модели физического процесса	67
§ 3.2.2. Теоретические методы решения задач тепломассообмена	69
§ 3.2.2.1. Математическое описание тепломассообмена	69
§ 3.2.2.2. Условия однозначности для решения дифференциальных уравнений переноса	76
§ 3.2.2.3. Методы решения математических моделей тепломассообмена	88
§ 3.2.3. Экспериментальные методы решения задач тепломассообмена	90
§ 3.2.3.1. Метод аналогии	91
§ 3.2.3.2. Метод теории подобия	94
Контрольные вопросы <i>по материалам третьей главы</i>	102
ГЛАВА 4. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ЧЕРЕЗ НЕПРОНИЦАЕМЫЕ СТЕНКИ	104
§ 4.1. Понятие процесса теплопередачи	104
§ 4.2. Расчет теплоотдачи	106
§ 4.3. Расчет стационарной теплопроводности в стенках простой формы	107
§ 4.3.1. Плоская стенка	107
§ 4.3.2. Цилиндрическая стенка	110
§ 4.3.3. Шаровая стенка (стенка сферической формы)	113
§ 4.4. Расчет теплопередачи через стенки простой формы	115
§ 4.4.1. Теплопередача через плоскую стенку	116
§ 4.4.2. Теплопередача через цилиндрическую стенку	122
§ 4.4.3. Теплопередача через шаровую стенку	129

§ 4.4.4. Алгоритм расчета теплопередачи через непроницаемые стенки	134
§ 4.4.4.1. Алгоритм решения прямой задачи расчета теплопередачи	135
§ 4.4.4.2. Алгоритм решения обратной задачи расчета теплопередачи	137
§ 4.4.5. Интенсификация теплопередачи через непроницаемые стенки	138
§ 4.4.5.1. Конструктивный способ интенсификации теплопередачи	138
§ 4.4.5.2. Режимный способ интенсификации теплопередачи	141
§ 4.4.6. Критический радиус цилиндрической и шаровой стенок. Выбор изоляции	142
Контрольные вопросы <i>по материалам четвертой главы</i>	152
ЧАСТЬ 2. ВНУТРЕННИЙ ТЕПЛООБМЕН	154
ГЛАВА 5. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ	154
§ 5.1. Основной закон теории теплопроводности. Закон (гипотеза) Фурье	154
§ 5.2. Коэффициент температуропроводности. Энергетическая форма записи основного закона теплопроводности	158
§ 5.3. Дифференциальное уравнение теплопроводности	161
§ 5.3.1. Вывод дифференциального уравнения теплопроводности	161
§ 5.3.2. Частные случаи записи дифференциального уравнения Фурье	168
§ 5.4. Условия однозначности, необходимые для решения дифференциального уравнения Фурье	178
§ 5.4.1. Начальное условие	179
§ 5.4.2. Граничные условия	180
§ 5.4.2.1. Граничные условия первого рода	181
§ 5.4.2.2. Граничные условия второго рода	183
§ 5.4.2.3. Граничные условия третьего рода	186

§ 5.4.2.4. Граничные условия четвертого рода для решения задачи теплопроводности	190
§ 5.5. Нестационарная теплопроводность в телах простой формы	192
§ 5.5.1. Математическая формулировка задачи	192
§ 5.5.2. Графическое представление температурного поля при граничных условиях I, II, и III родов в телах простой формы	195
§ 5.5.2.1. Температурное поле при граничных условиях I рода	195
§ 5.5.2.2. Температурное поле при граничных условиях II рода	198
§ 5.5.2.3. Температурное поле при граничных условиях III рода	203
§ 5.5.3. Аналитическое решение краевой задачи теории теплопроводности при граничных условиях третьего рода	206
§ 5.5.3.1. Общее аналитическое решение для тел простой формы	206
§ 5.5.3.2. Алгоритм расчета температурного поля тел простой формы при ГУ III рода	209
§ 5.5.3.3. Расчет регулярного режима теплопроводности	210
§ 5.5.3.4. Расчет регулярного режима теплопроводности в телах простой формы по номограммам	216
§ 5.5.3.5. Экспериментальное исследование регулярного режима теплопроводности	224
§ 5.5.4. Расчет температурного поля в телах сложной формы по номограммам	229
§ 5.5.5. Температурное поле тел простой формы в зависимости от критерия Био	230
§ 5.5.6. Расчет температурных полей тел простой формы методом сеток	235
§ 5.5.6.1 Теоретические основы численных методов	235

§ 5.5.6.2. Метод сеток для решения краевой задачи теории теплопроводности	237
§ 5.5.6.3. Явная разностная схема решения краевой задачи теории теплопроводности	253
§ 5.5.6.4. Свойства явной разностной схемы	257
§ 5.5.6.5. Алгоритм применения явной разностной схемы	257
Контрольные вопросы <i>по материалам пятой главы</i>	261
<b>ГЛАВА 6. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ С ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛОТЫ</b>	264
§ 6.1. Математическая формулировка задачи	264
§ 6.2. Теплопроводность неограниченной пластины с внутренними источниками теплоты	266
§ 6.3. Теплопроводность неограниченного цилиндра с внутренними источниками теплоты	272
§ 6.4. Теплопроводность шара с внутренними источниками теплоты	278
§ 6.5. Общее решение задачи стационарной теплопроводности для тел простой формы с внутренними источниками теплоты	283
§ 6.6. Теплопроводность неограниченной цилиндрической стенки с внутренними источниками теплоты	285
§ 6.6.1. Отвод теплоты только через внутреннюю поверхность цилиндрической стенки	286
§ 6.6.2. Отвод теплоты только через наружную поверхность цилиндрической стенки	290
§ 6.6.3. Отвод теплоты через внутреннюю и наружную поверхности цилиндрической стенки	295
§ 6.7. Температурное поле в стержневом тепловыделяющем элементе (ТВэле)	301
Контрольные вопросы <i>по материалам шестой главы</i>	314
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b>	317
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ</b>	321

БУХМИРОВ Вячеслав Викторович

## ТЕПЛОМАССОБМЕН

*Учебник*

*в двух томах*

*ТОМ I*

Редактор Т.В. Соловьева

Подписано в печать .Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Печать плоская. Усл. печ. л. 21,15 . Уч.-изд, л. 20,8 . Тираж

310 экз. Заказ № . ФГБОУВО “Ивановский государствен-  
ный энергетический университет имени В.И. Ленина”

153003, г. Иваново, ул. Рабфаковская, 34.